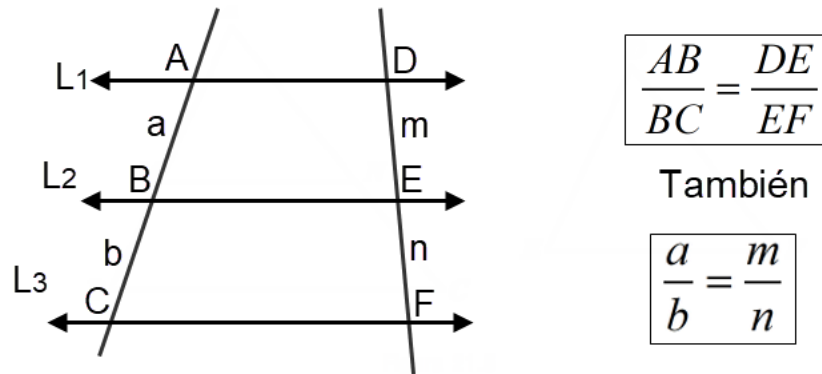


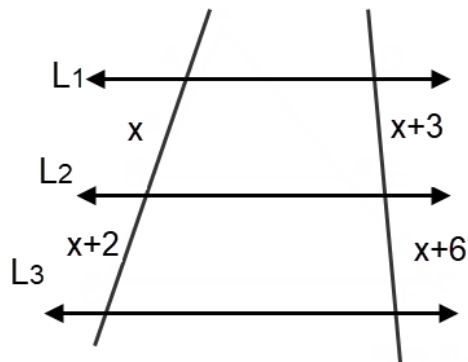
## Teorema de Thales

El teorema general de Thales afirma que, si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados en una de las transversales son respectivamente proporcionales a los segmentos determinados en otra. Las rectas paralelas son  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ .



### Ejemplos

Calcular el valor de "x" en la siguiente figura aplicando el teorema de Thales:



### Solución

Aplicando Thales:

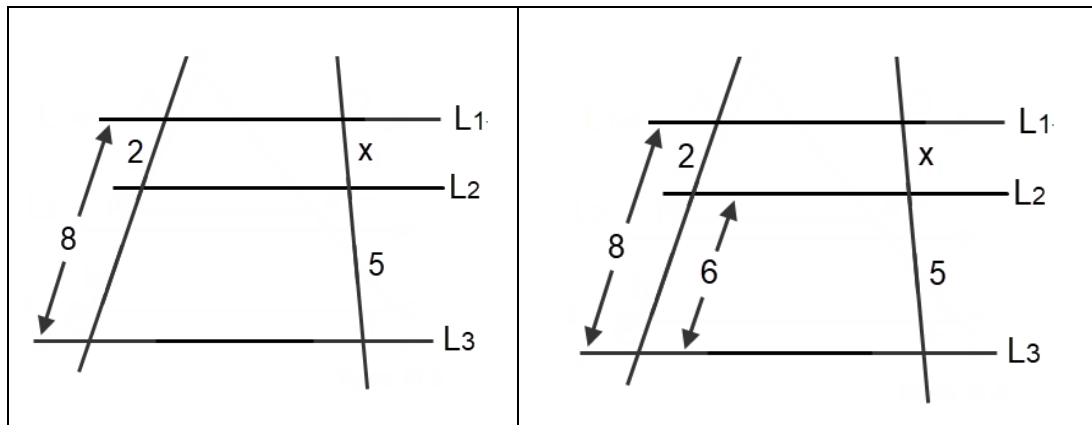
$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+3}{x+6} \rightarrow x(x+6) = (x+2)(x+3) \rightarrow x^2 + 6x = x^2 + 3x + 2x + 6$$

$$x^2 + 6x = x^2 + 5x + 6 \quad (\text{simplificando } x^2) \rightarrow 6x = 5x + 6 \rightarrow 6x - 5x = 6$$

$$x = 6$$

## Ejemplos

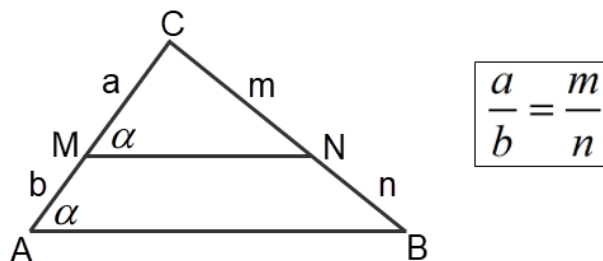
Calcular el valor de "x" en la siguiente figura aplicando el teorema de Tales:



$$\frac{2}{6} = \frac{x}{5} \rightarrow 10 = 6x \rightarrow \frac{10}{6} = x \rightarrow \frac{5}{3} = x$$

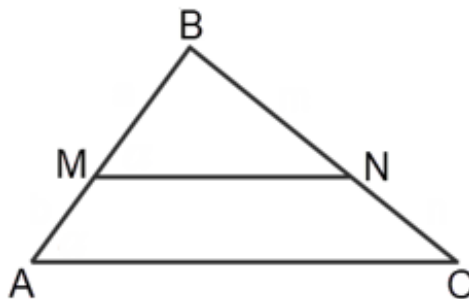
### Primer caso particular del Teorema de Tales

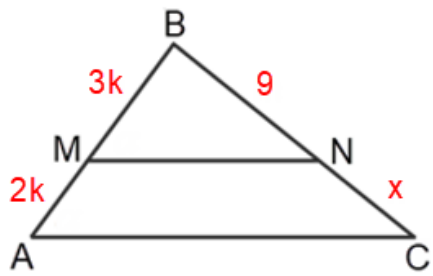
Toda recta que corta a dos lados (o a sus prolongaciones) de un triángulo, y es paralela al tercer lado, determina un segundo triángulo que es semejante al primero:



### Ejemplo

En el gráfico mostrado  $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$ . Además,  $2(\overline{BM}) = 3(\overline{AM})$  y  $BN = 9$ . Se pide hallar el valor CN.



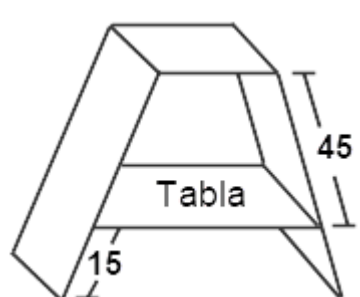
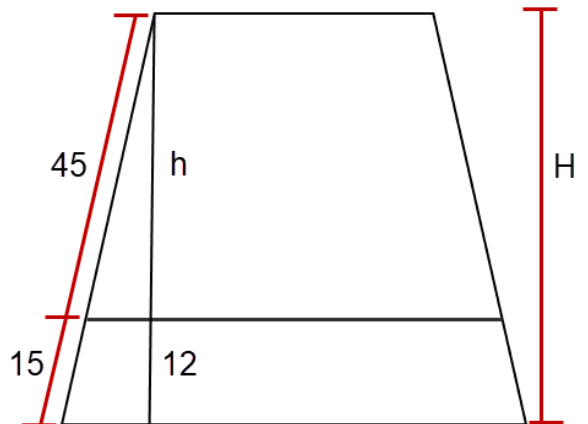
$2(\overline{BM}) = 3(\overline{AM}) \quad (\text{es una igualdad})$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $2(3k) = 3(2k)$ $6k = 6k$	
---	--

Aplicamos caso particular Thales:

$$\frac{3k}{2k} = \frac{9}{x} \quad (\text{simplificamos } k) \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{x} \rightarrow 3x = 2(9) \rightarrow x = \frac{18}{3} \rightarrow x = 6$$

### Ejemplo

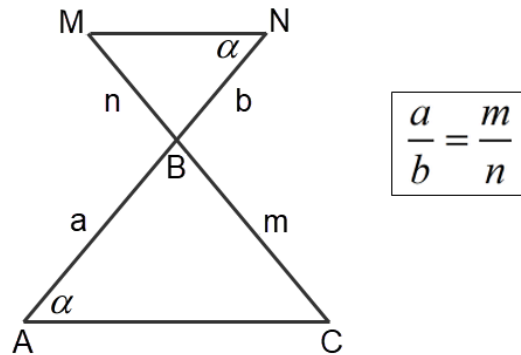
Manuel se ha inscrito en un taller de carpintería, y como primer trabajo ha construido un mueble de madera de forma trapezoidal isósceles. Si la tabla inferior del mueble está a una altura de 12 cm ¿cuál es la altura del mueble?

	
---	--

Aplicamos caso particular Thales:

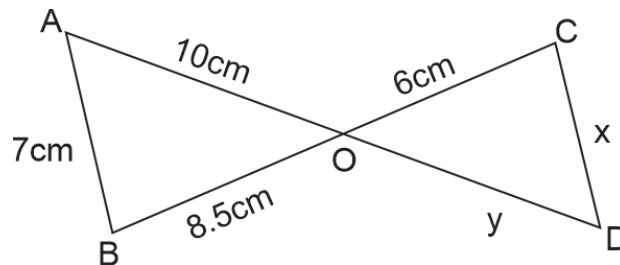
$$\frac{45}{15} = \frac{h}{12} \rightarrow 15h = 45(12) \rightarrow 15h = 540 \rightarrow h = \frac{540}{15} \rightarrow h = 36$$

## Segundo caso particular del Teorema de Thales:



### Ejemplo

En la siguiente figura, determinar los valores de “x” e “y”. Explicar que ángulos son iguales.



Tenemos dos líneas que son paralela: AB y CD, por tal razón, los ángulos A y D son iguales, y los ángulos B y C son iguales. En el punto de corte “O” hay ángulos opuestos por el vértice.

$$\frac{6}{8.5} = \frac{y}{10} \quad \rightarrow \quad 8.5y = 6(10) \quad \rightarrow \quad 8.5y = 60 \quad \rightarrow \quad y = \frac{60}{8.5} \quad \rightarrow \quad y = 7.05 \text{ m}$$

$$\frac{6}{8.5} = \frac{x}{7} \quad \rightarrow \quad 8.5x = 6(7) \quad \rightarrow \quad 8.5x = 42 \quad \rightarrow \quad x = \frac{42}{8.5} \quad \rightarrow \quad x = 5 \text{ m}$$

### Semejanza de triángulos

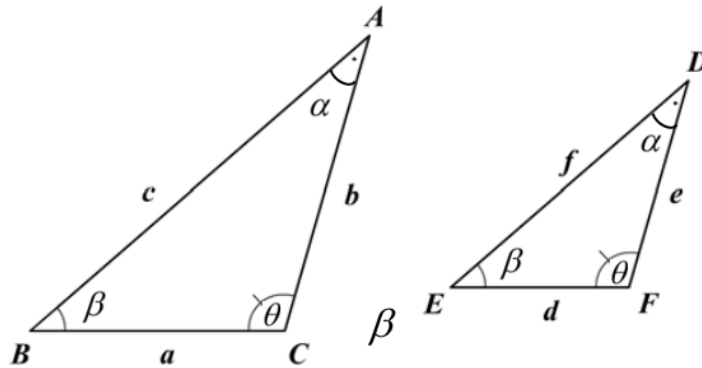
La semejanza de triángulos estudia figuras que son generalmente de tamaños diferente. En la semejanza se suele encontrarse con un triángulo pequeño y un triángulo grande. Cómo dos triángulos pueden vincular sus longitudes y sus medidas angulares en base a unos criterios de semejanza.

#### ¿Qué significa que dos triángulos sean semejantes?

1. Que los ángulos de un triángulo tienen las mismas medidas de los ángulos del otro triángulo
2. Que los lados de un triángulo están en proporción directa con los lados del otro triángulo.

Si tenemos dos triángulos semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$



Entonces se cumple:

$$\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}, \hat{C} \cong \hat{F}$$

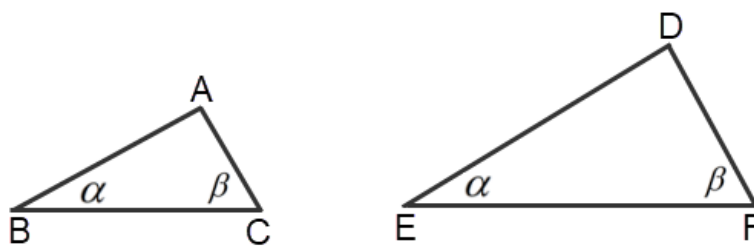
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad \text{o} \quad \frac{c}{f} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e}$$

Se dice que el lado **AB** es homologo con el lado **ED**, de igual forma: el lado **BC** es homologo con el lado **EF**.

### Casos de semejanza de triángulos

Por lo general, en la práctica se debe buscar los triángulos que son semejantes, hay que encontrarlos. Además, no siempre nos van a decir en que orden están los vértices, hay que deducirlos.

#### Caso I: A-A (Ángulo – Ángulo)



Se observa que:

$$\hat{C} \cong \hat{F}$$

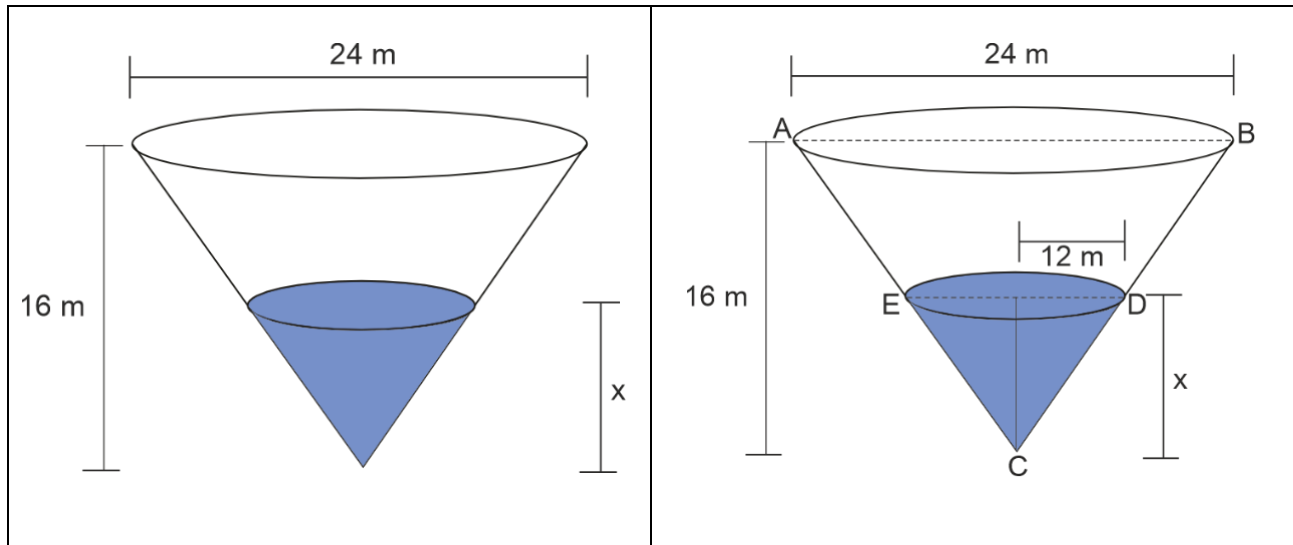
$$\hat{B} \cong \hat{E}$$

Se concluye que los triángulos son semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

### Ejemplo

Un depósito cónico invertido tiene 16 metros de altura y el diámetro en la parte superior es de 24 metros. La altura "y" del nivel del agua en el depósito cuando el volumen es  $96\pi\text{m}^3$  es de cuánto:



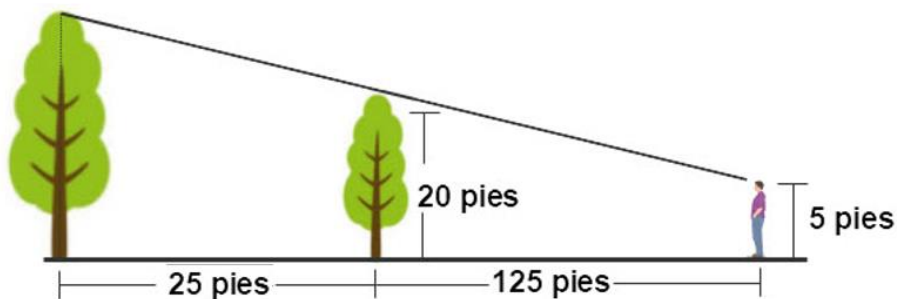
El caso de semejanza es A – A. Hay semejanza de triángulos:  $ECD \sim ACB$ , se observa que ambos triángulos tienen un ángulo en común (ángulo c). De igual forma:  $D = B$

$$\frac{24}{16} = \frac{12}{y} \rightarrow 24y = 192 \rightarrow y = \frac{192}{24} \rightarrow y = 8\text{m}$$

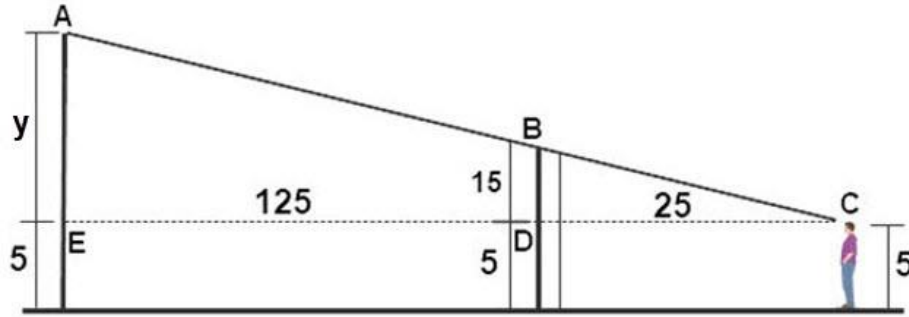
### Ejemplo

En el siguiente diagrama el árbol pequeño mide 20 pies de altura y los ojos del caminante están a 5 pies por encima del suelo, la altura del árbol más alto es:

- a. 95 pies
- b. 120 pies
- c. 80 pies
- d. 100 pies

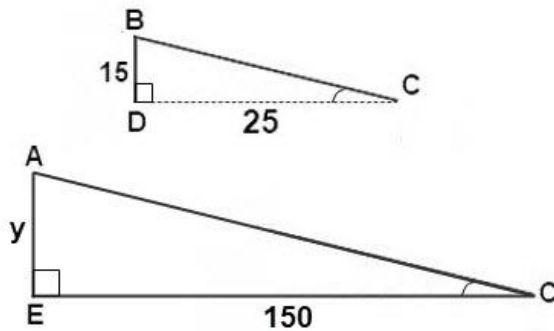


Para comprender el gráfico, hacemos un esquema con los triángulos semejantes.



Tenemos semejanza de triángulos:

Caso A – A



A – A (el ángulo C es el mismo para ambos triángulos y el ángulo de 90°)

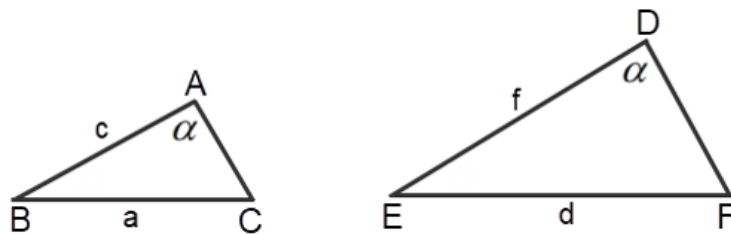
$$\frac{15}{y} = \frac{25}{150} \rightarrow 25y = 2250$$

$$y = \frac{2250}{25} \rightarrow y = 90 \text{ pies}$$

Se concluye que el árbol mide:

$$90 \text{ pies} + 5 \text{ pies} = 95 \text{ pies}$$

### Caso II: L-A-L (Lado – Ángulo – Lado)



Se observa que:

$$\hat{A} \cong \hat{D}$$

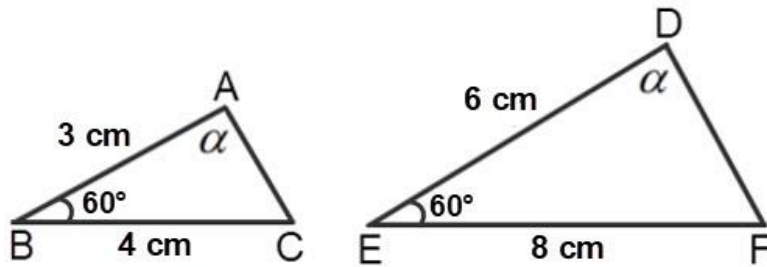
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Se concluye que los triángulos son semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

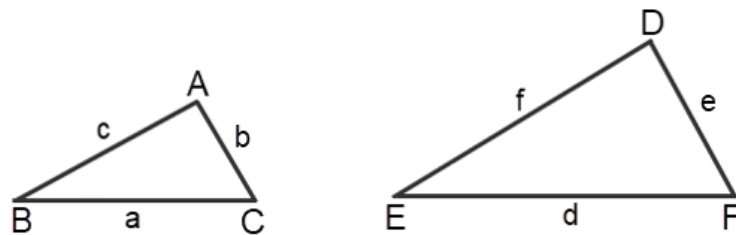
**Ejemplo:**

Verificar si los siguientes triángulos son semejantes:



$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \rightarrow 2 = 2$  (ambos lados dan el mismo resultado: 2). Por lo tanto, si son semejantes y el criterio es **L - A - L**.

**Caso III: L-L-L (Lado - Lado - Lado)**



Se observa que:

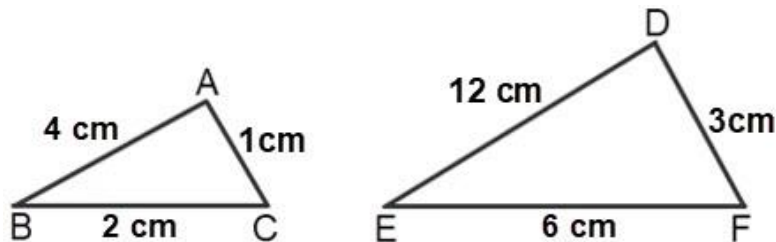
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Se concluye que los triángulos son semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

**Ejemplo:**

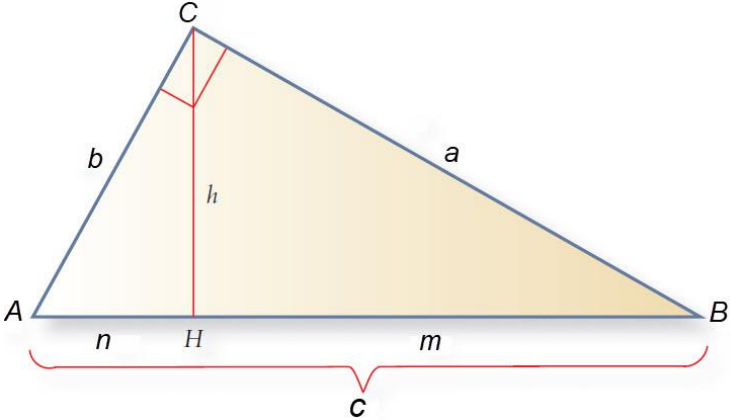
Verificar si los siguientes triángulos son semejantes:



$\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = \frac{12}{4} \rightarrow 3 = 3 = 3$  (todos dan el mismo resultado: 3). Por lo tanto, si son semejantes y el criterio es **L - L - L**.

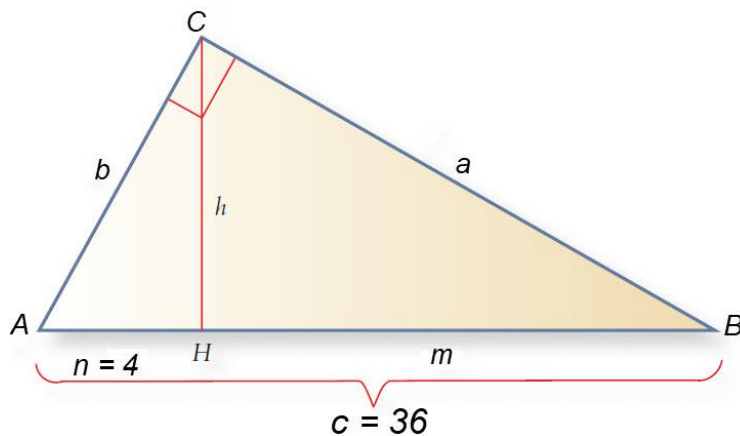
## Relaciones de proporcionalidad entre catetos e hipotenusa al trazar la altura (Teorema Cateto)

Dada la siguiente figura se cumple las siguientes propiedades:

	<p><b>Para el triángulo CHB:</b></p> $a^2 = cm$ <p><b>Para el triángulo AHC:</b></p> $b^2 = cn$ <p><b>También se cumple:</b></p> $\frac{c}{a} = \frac{a}{m}, \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{n}$
---	---

### Ejemplo

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 36 cm y la proyección de un cateto sobre ella 4 cm. Halla el otro cateto y la altura.



### Solución

Se puede observar que  $m = 32$  ( $4 + 32 = 36$ ). Aplicamos la propiedad:

$$a^2 = cm \rightarrow a^2 = 36(32) \rightarrow a^2 = 1152 \rightarrow a = \sqrt{1152} \rightarrow a = 33.94 \rightarrow a \approx 34 \text{ cm}$$

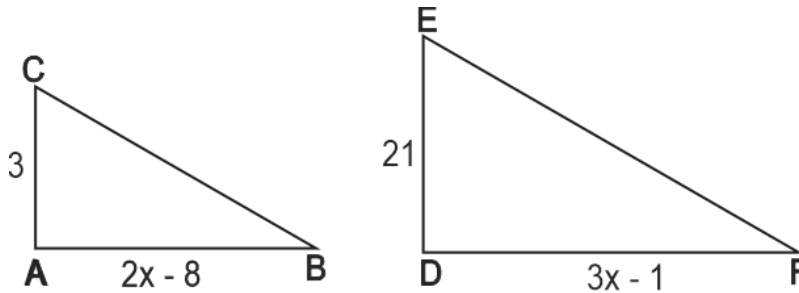
Para hallar la altura “h” aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + m^2 \rightarrow h^2 = a^2 - m^2 \rightarrow h^2 = (34)^2 - (32)^2 \rightarrow h^2 = 1156 - 1024 \rightarrow h^2 = 132$$

$$h = \sqrt{132} \rightarrow h = 11.4 \text{ cm}$$

## Taller sobre Semejanza de triángulos

1. En la figura:  $ABC \sim DEF$ , averiguar cuánto mide el lado DE:



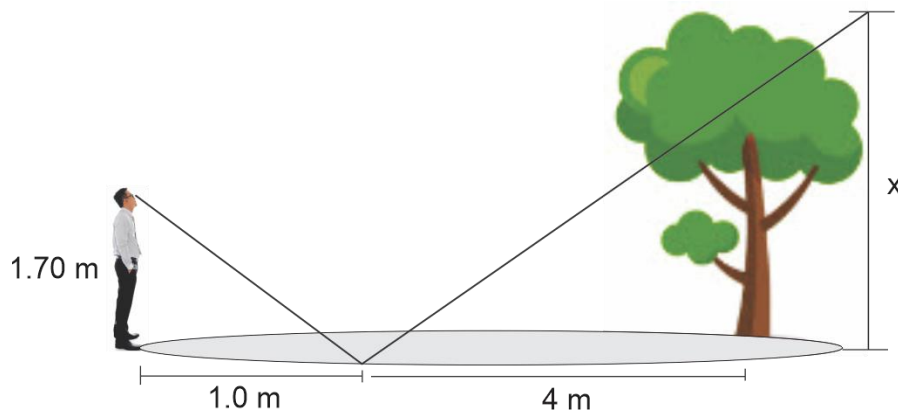
$$\frac{3}{21} = \frac{2x-8}{3x-1} \rightarrow 21(2x-8) = 3(3x-1) \rightarrow 42x - 168 = 9x - 3 \rightarrow 42x - 9x = -3 + 168$$

$$33x = 165 \rightarrow x = \frac{165}{33} \rightarrow x = 5$$

Por lo tanto, el lado  $DE = 3x - 1 = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14$

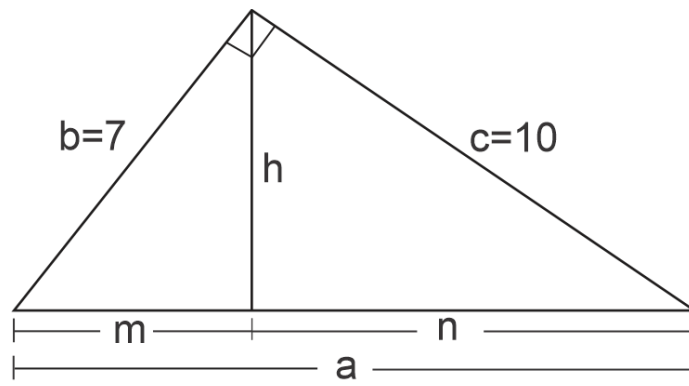
## Taller sobre Thales y semejanza de triángulos

1. Calcular la altura del árbol sabiendo que Carlos ve la copa reflejada en un charco y toma las siguientes medidas:



$$\frac{1.70}{1} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 4(1.70) \rightarrow x = 6.8\text{m}$$

2. En un triángulo rectángulo los catetos miden 7 cm y 10 cm. Calcular el valor de la hipotenusa "a", la proyección "m" y la altura "h".



Para hallar el valor de "a" aplicamos teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = (7)^2 + (10)^2 \rightarrow a^2 = 49 + 100 \rightarrow a^2 = 149 \rightarrow a = \sqrt{149} \rightarrow a = 12.20$$

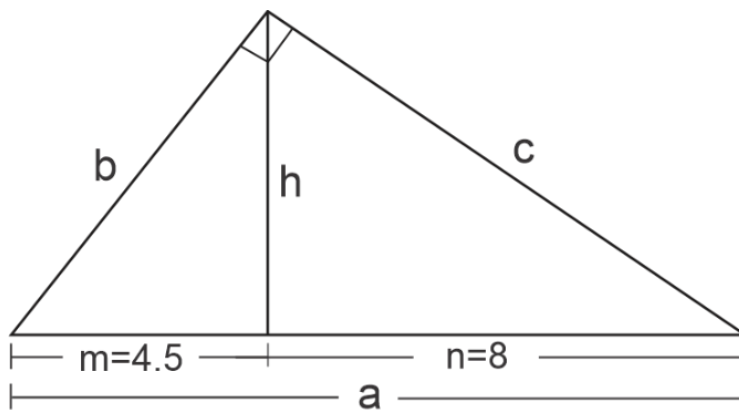
Aplicamos teorema Cateto para hallar la letra "m":

$$b^2 = am \rightarrow m = \frac{b^2}{a} \rightarrow m = \frac{(7)^2}{12.20} \rightarrow m = \frac{49}{12.20} \rightarrow m = 4.0$$

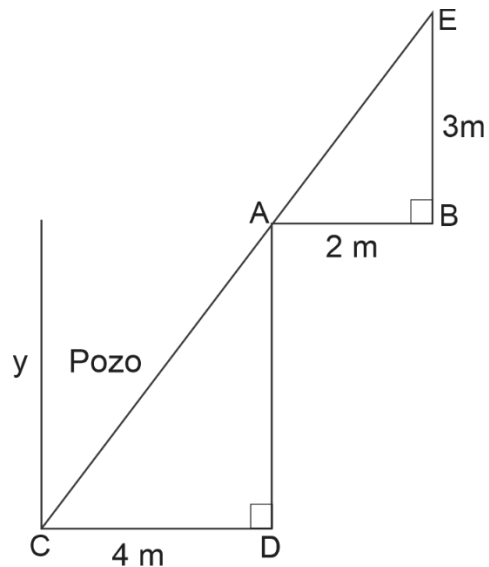
Para hallar el valor de "h" aplicamos teorema de Pitágoras:

$$h^2 = b^2 + m^2 \rightarrow h^2 = (7)^2 + (4)^2 \rightarrow h^2 = 49 + 16 \rightarrow h^2 = 65 \rightarrow h = \sqrt{65} \rightarrow h = 8.0$$

3. En un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos miden 8 cm y 4.5 cm. Calcular las medidas de los catetos y de la hipotenusa. Encontrar el valor de la altura.



4. Cuál es la profundidad del pozo si su anchura es 4 metros y alejándose 2 metros del borde desde una altura de 3 metros ves en la misma visual el borde del pozo y la esquina del fondo.



Los lados CD y AB son paralelas. Tenemos dos triángulos que son semejantes. Sería el caso A – A (ambos tienen un ángulo de 90° y en el punto A tenemos ángulos opuestos por el vértice (son iguales)).

$$\frac{4}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow 2y = 4(3) \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{2} \rightarrow y = 6\text{m}$$