IE LA SALLE DE CAMPOAMOR
GUIÍA-TALLER
GESTIÓN ACADÉMICA PEDAGÓGICA
N.º: 1 PERÍODO: 01 AÑO: 2024

Grado: 10 Área: Matemáticas. Áreas Transversales: Tecnología, Lengua Castellana
Elabora: Oswaldo Muñoz Cuartas

COMPETENCIA

Reconoce los sistemas de medición angular.
Identifica las funciones trigonométricas para triángulos rectángulos.
Determina los signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano.

INDICADORES DE DESEMPEÑO:

- Reconocimiento de los sistemas de medición angular a partir de un problema real.
- Realización de ejercicios con ángulos, arcos y radios en contexto real.
- Determinación de las razones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo.
- Determinación del signo de las funciones trigonométricas en cada cuadrante del plano cartesiano
- Utilización de los recursos informáticos para resolver problemas de trigonometría.

METODOLOGÍA

INICIACIÓN

Se entrega la guía para que el estudiante la conozca e inicie el aprendizaje de las propiedades del **Sistema Angular,** a partir de los recursos virtuales que ofrece Internet, tales como videos y documentos de apoyo.

CONTEXTUALIZACIÓN

En un primer momento, el estudiante debe observar los vídeos que se le remiten en la guía para el aprendizaje del sistema angular. Luego ejercitar lo aprendido a través de ejercicios prácticos.

EVALUACIÓN: Los estudiantes deben realizar el taller que aparece al final de la guía en sus cuadernos. En su momento determinado se revisarán.

Vídeo sobre sistemas de medición angular
https://www.youtube.com/watch?v=lpCYh33U18I

Vídeo sobre ángulos, arcos y radios
https://www.youtube.com/watch?v=3kVyLRjoWuA

Vídeo sobre razones trigonométricas en un triángulo rectángulo
https://www.youtube.com/watch?v=nGS1glnproM

Vídeo sobre signo de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano
https://www.youtube.com/watch?v=lA44pw6bhYU

Vídeos sobre identidades trigonométricas simples
https://www.youtube.com/watch?v=3FjBlgSSlok

https://www.youtube.com/watch?v=PbvKVSWyvpI&list=PLeySRPnY35dHK3mo8UWd3zAnYCG13OgAR&index=1

https://www.youtube.com/watch?v=i15j9AubvbE

Vídeos sobre identidades trigonométricas dobles y mitad, suma y resta
https://www.youtube.com/watch?v=okssuSEE8Eo
https://www.youtube.com/watch?v=3tKYpMrDf10

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la parte de las matemáticas que trata de la resolución analítica de los triángulos, relacionando sus lados y sus ángulos.

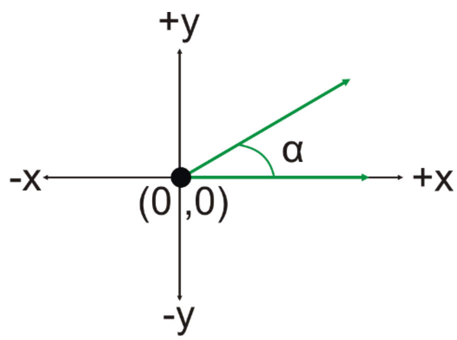
ÁNGULO

Un ángulo es la figura formada por dos semirrectas de origen común.

ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

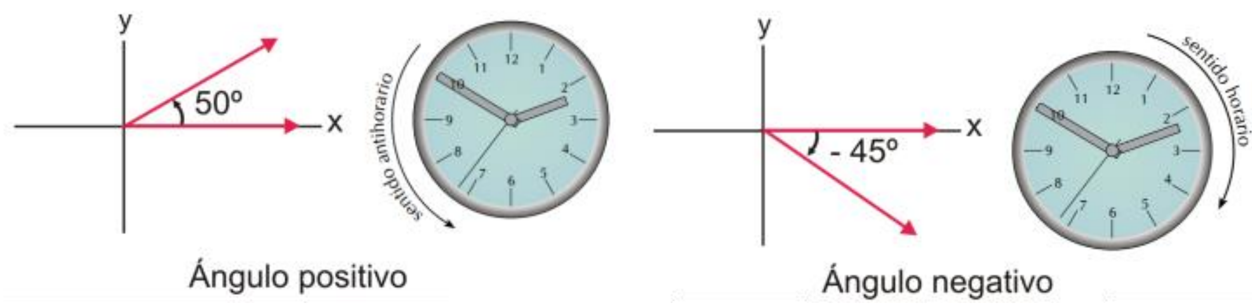
Un ángulo está en posición normal si:

- El vértice del ángulo coincide con el origen (0,0) del plano cartesiano.
- Si el lado inicial está ubicado en el eje +x



Ángulo positivo y ángulo negativo

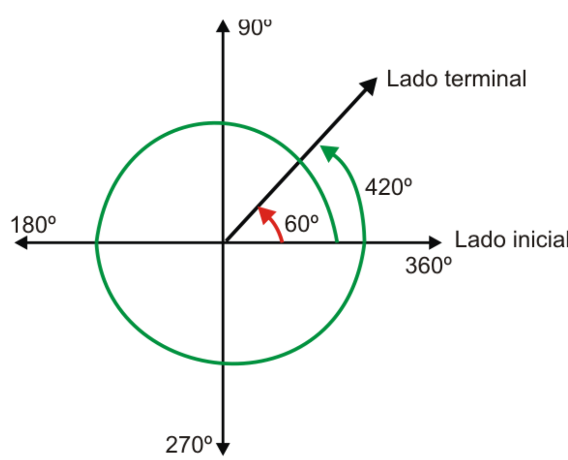
Un ángulo en posición normal es positivo cuando se ha formado haciendo girar el lado terminal en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y es negativo cuando se forma al hacer girar el lado terminal en el sentido de las manecillas del reloj.



Ángulos COTERMINALES

Dos o tres ángulos son **COTERMINALES** si sus lados finales coinciden respectivamente.

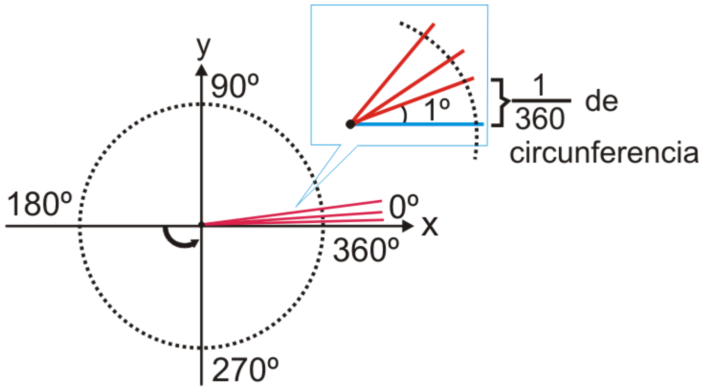
Ejemplo: Verificar si los ángulos de 60º y 420º son COTERMINALES.



Sistemas de medida angular

Los sistemas de medida angular más utilizados en la mayoría de las aplicaciones de la trigonometría, son el sistema sexagesimal y el sistema circular.

✓ **Sistema sexagesimal:** La unidad de medida en este sistema es el grado (º), el cual se define como la medida del ángulo central de una circunferencia que subtiende un arco equivalente a 1/360 del perímetro total.



1/4 de vuelta equivale a 90º.

1/2 de vuelta equivale a 180º

Mediciones en el sistema sexagesimal

En este sistema 1º = 60 minutos (60’)

1 minuto = 60 segundos (60’’)

31 grados, 28 minutos y 36 segundos se expresan como 31º 28’ 36’’.

Ejemplo: Convierte 75, 37º a grados, minutos y segundos

Solución

75, 37º = 75º + 0,37(60’) = 75º + 22,2’

75º + 22,2’ = 75º + 22’ + 0,2(60’’) = 75º + 22’ + 12’’

Ejemplo: Convierte 25, 36º a grados, minutos y segundos

25, 36º = 25º + 0,36(60’) = 25º + 21,6’

25º + 21,6’ = 25º + 21’ + 0,6(60’’) = 25º + 21’ + 36’’

Calculadora

Ejemplo

Convierte 75, 37º a grados, minutos y segundos

1. Copiamos 75,37

2. Usamos el botón:

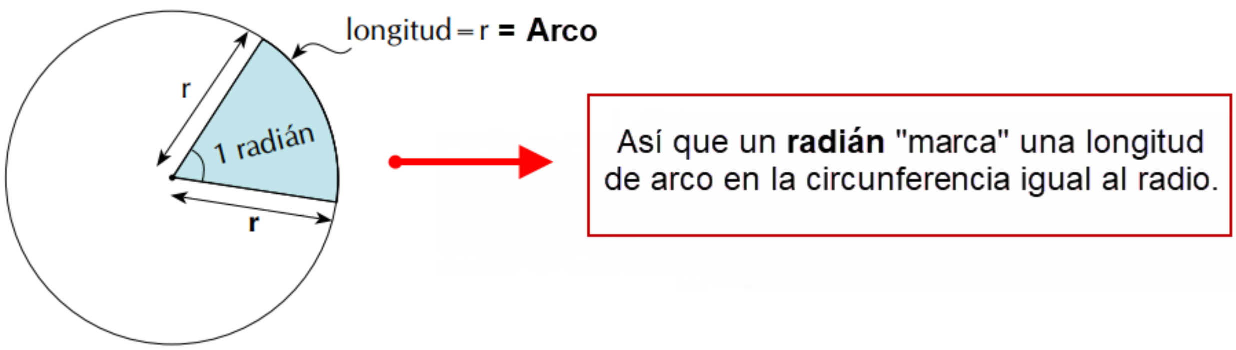
   ° ’ ’’

3. Damos igual: Nos aparece:

   75º 22’ 12’’

SISTEMA CIRCULAR

En este sistema la unidad de medida es el RADIÁN



Un RADIÁN es la medida del ángulo central que subtiende en cualquier circunferencia un arco de igual longitud igual al radio.

RELACIÓN ENTRE LOS DOS SISTEMAS

$$\boxed{180^0 = \pi \text{rad}}$$

FACTORES DE CONVERSIÓN:

✓ **De radianes a grados sexagesimales:**

Se reemplaza el valor de:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Ejemplo

Pasar a grados el siguiente radian: $\frac{2\pi}{3}$

Debemos reemplazar: $\pi = 180°$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2(180^\circ)}{3} = 120^\circ$$

Ejemplo

Pasar a grados el siguiente radian: $\frac{7\pi}{3}$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{7(180^{o})}{3} = 420^{o}$$

✓ **De grados a radianes**

Se aplica la siguiente formula:

$$\boxed{\frac{(\ )\pi}{180}}$$

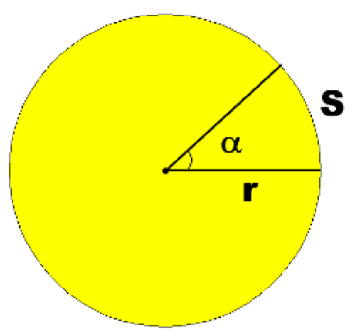
Colocamos el valor en grados dentro del paréntesis y simplificamos

Ejemplos

Pasar a radianes el 60° a radianes:

$$\frac{(60)\pi}{180} = \frac{(30)\pi}{90} = \frac{(15)\pi}{45} = \frac{(5)\pi}{15} = \frac{\pi}{3}$$

Relación entre arcos, ángulos y radios en un círculo



La medida S de un arco subtendido por un ángulo central α (medido en radianes) de un círculo de radio r, está dado por:

$S = r\alpha$ (S se expresa en centímetros o metros)

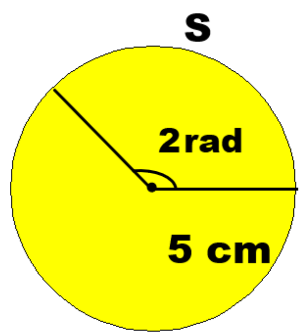
Relación entre arcos, ángulos y radios en un círculo:

✓ $\frac{S}{\alpha} = r$ (r se expresa en centímetros o metros)

✓ $\frac{S}{r} = \alpha$ (α se expresa en radianes o grados)

Ejemplo 1

Halle la medida del arco subtendido por un ángulo de 2 radianes, si el radio del círculo es de 5 cm.



$S = r\alpha \quad \rightarrow \quad S = (5\,cm)(2) = 10\,cm$

Ejemplo 2

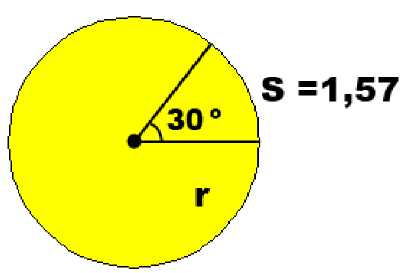
¿Cuál es la medida en grados de un ángulo central que subtiende un arco de 8/9 de la circunferencia de un círculo?

Sabemos que 1/360 = 1º de la circunferencia, entonces: ¿8/9 cuánto es?

$$\frac{\frac{1}{360}}{\frac{8}{9}} = \frac{1^{o}}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{360} \cdot x = \frac{8}{9} \cdot (1^{o}) \quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{9} \cdot (360^{o}) \rightarrow \quad x = 320^{o}$$

Ejemplo 3

Halla la medida del radio de un círculo, si se sabe que un ángulo central de 30º subtiende un arco de 1,57 centímetros.



Primero debemos convertir el ángulo de 30º en radianes.

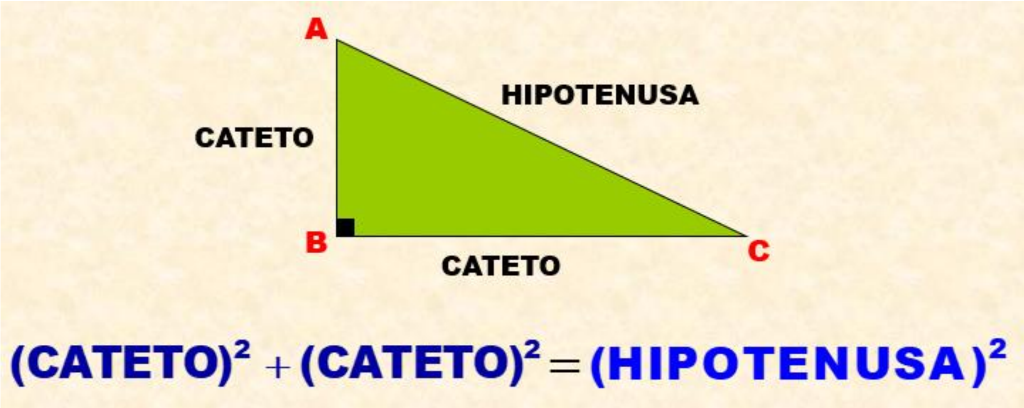
$$\alpha = \frac{(30^{o})\pi}{180^{o}} = \frac{\pi}{6}$$

Usamos la fórmula: $\frac{S}{\alpha} = r$

$$\frac{S}{\alpha}=r \rightarrow \frac{1{,}57\,cm}{\frac{\pi}{6}}=r \rightarrow \frac{1{,}57\,cm\times 6}{\pi}=r \rightarrow 3\,cm=r$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ANGULOS AGUDOS (TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS)

TEOREMA DE PITÁGORAS

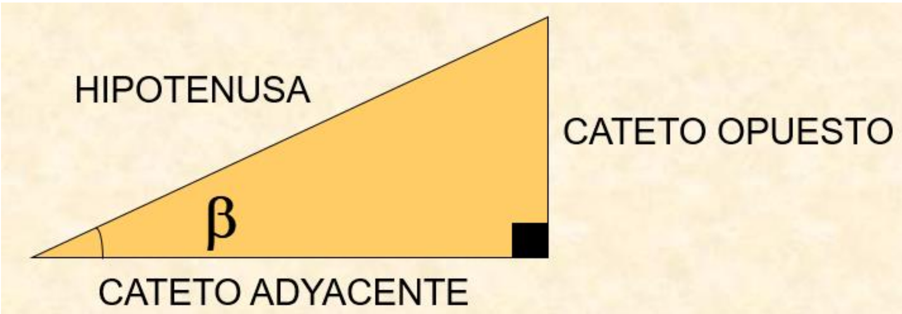


Ejemplos de triángulos rectángulos que cumplen Pitágoras

Para el primer triángulo verifiquemos que si cumple Pitágoras:

$$(3)^2+(4)^2=(5)^2 \rightarrow 9+16=25 \rightarrow 25=25 \ \ (\text{si cumple})$$

Razones trigonométricas de ángulos agudos (triángulos rectángulos)

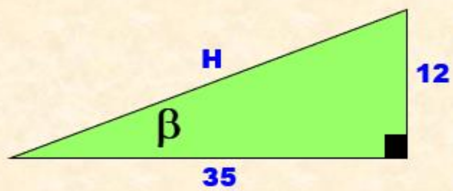


Las fórmulas de las 6 razones trigonométricas son:

SENO $\operatorname{Sen}\beta = \dfrac{\text{CatetoOpuesto a}\,\beta}{\text{Hipotenusa a}\,\beta}$	**COSENO** $\cos\beta = \dfrac{\text{CatetoAdyacente a}\,\beta}{\text{Hipotenusa}}$
TANGENTE $\tan\beta = \dfrac{\text{CatetoOpuesto a}\,\beta}{\text{CatetoAdyacente a}\,\beta}$	**COTANGENTE** $\cot\beta = \dfrac{\text{CatetoAdyacente a}\,\beta}{\text{CatetoOpuesto a}\,\beta}$
SECANTE $\sec\beta = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{CatetoAdyacente a}\,\beta}$	**COSECANTE** $\csc\beta = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{CatetoOpuesto a}\,\beta}$

Ejemplo:

En el siguiente triángulo, encontrar la hipotenusa, luego calcular las razones trigonométricas:



TEOREMA DE PITÁGORAS

$$H^2 = 12^2 + 35^2$$
$$H = \sqrt{1369} = 37$$

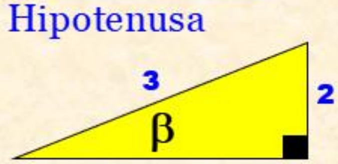
Empleamos las fórmulas de las razones trigonométricas:

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{12}{37}$	$\tan\beta = \dfrac{12}{35}$	$\sec\beta = \dfrac{37}{35}$
$\cos\beta = \dfrac{35}{37}$	$\cot\beta = \dfrac{35}{12}$	$\csc\beta = \dfrac{37}{12}$

Ejemplo:

Sabiendo que β es un ángulo agudo tal que: sen β = 2/3, hallar las otras funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{2}{3} = \frac{\text{Cateto Opuesto a }\beta}{\text{Hipotenusa}}$$



Usamos Pitágoras para encontrar el otro cateto:

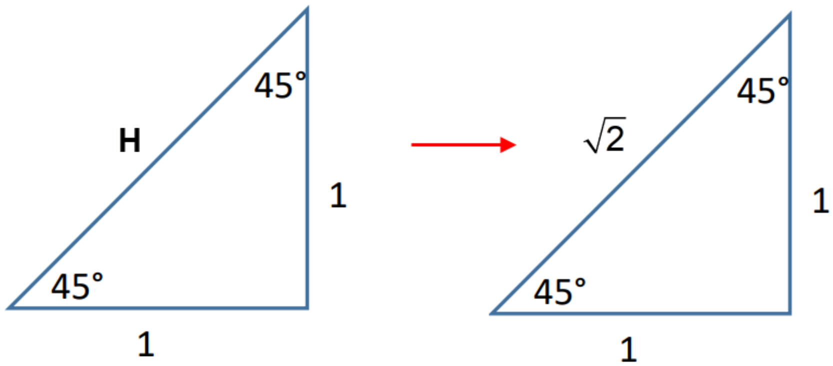
$3^2 = 2^2 + x^2 \;\rightarrow\; 9 - 4 = x^2 \;\rightarrow\; 5 = x^2 \;\rightarrow\; +\sqrt{5} = x$

Empleamos las fórmulas de las razones trigonométricas:

$\text{sen}\,\beta = \frac{2}{3}$	$\tan\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\sec\beta = \frac{3}{\sqrt{5}}$
$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cot\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\csc\beta = \frac{3}{2}$

Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Consideremos el siguiente triángulo (catetos de valor 1)



Aplicamos Pitágoras para encontrar la hipotenusa (H):

$$H^2 = (1)^2 + (1)^2 \quad \to \quad H^2 = 1 + 1 \quad \to \quad H^2 = 2 \quad \to \quad H = \sqrt{2}$$

Procedemos a aplicar las 6 razones trigonométricas al ángulo de 45°:

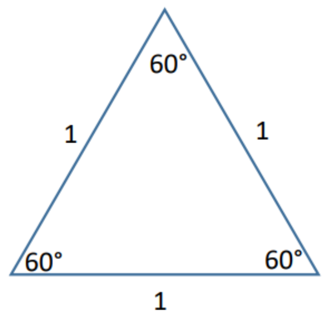
$$\text{Sen}\,45° = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \to \quad \text{Sen}\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De igual forma se procede con las otras 5 razones trigonométricas. Ver resumen:

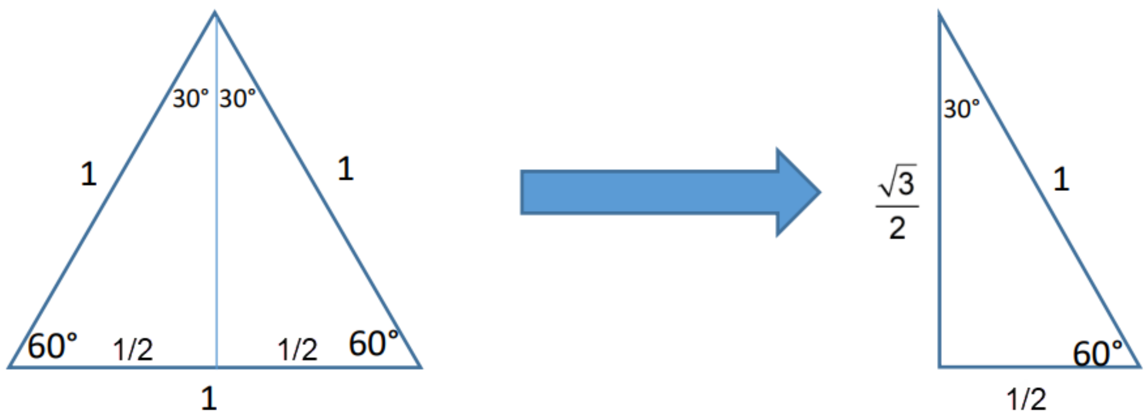
θ in degrees	θ in radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

Razones trigonométricas del ángulo de 30° y 60°

Si consideramos un triángulo equilátero donde los ángulos internos valen 60 grados cada uno, la medida de sus lados es 1.



Trazamos su altura que lo divide en dos triangulo rectángulos, de los cuales tomo uno de ellos y tenemos dos ángulos, uno de 30 y otro de 60 grados.



Aplicamos Pitágoras para encontrar el valor del cateto “c”.

$$(1)^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow (1)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = c^2 \rightarrow 1 - \frac{1}{4} = c^2 \rightarrow \frac{4-1}{4} = c^2 \rightarrow \frac{3}{4} = c^2$$

$$\frac{3}{4} = c^2 \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}} = c \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = c$$

Procedemos a aplicar las 6 razones trigonométricas al ángulo de 35° y 60°

$$\text{Sen}\,60° = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \rightarrow \text{Sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De igual forma se procede con las otras razones trigonométricas. Ver resumen:

θ in degrees	θ in radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo: Simplificar el siguiente ejercicio:

$$\frac{\text{Sen}30° + \text{Cos}30°\text{Cot}60°}{\text{Sen}30°}$$

Solución: Reemplazamos los valores de la tabla: Razones trigonométricas.

$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}}$	Primero se hace la multiplicación y luego la suma
$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}}$	Hacemos la suma de fraccionarios
$\dfrac{\frac{6+6}{12}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{12}{12}}{\frac{1}{2}}$	Hacemos la ley de los inversos
$\frac{24}{12}=2$	Se simplifica

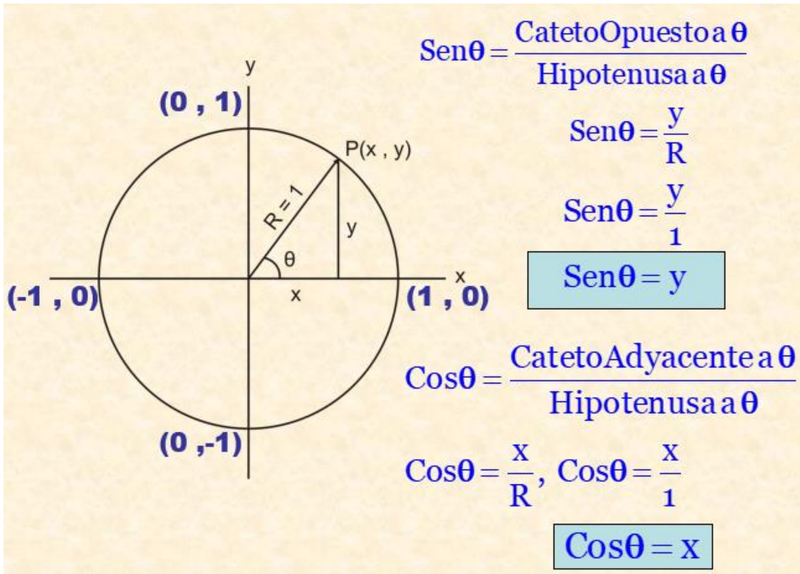
Circunferencia trigonométrica

Es una circunferencia Inscrita en un sistema de coordenadas rectangulares (x, y) cuyo centro coincide con el origen de dicho sistema. Esta circunferencia tiene como característica fundamental, el valor del radio que es la unidad (R = 1).

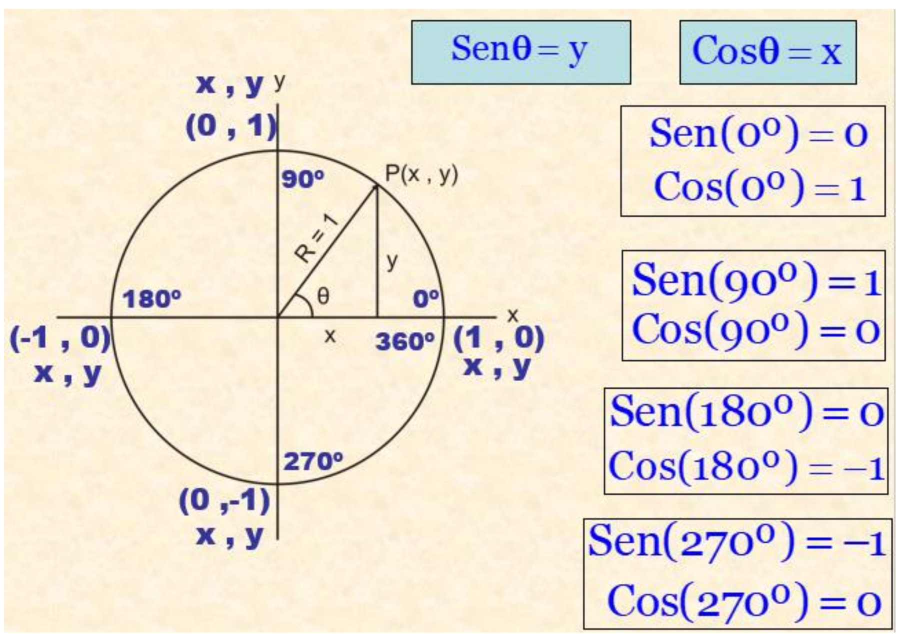
Esta circunferencia trigonométrica sirve para representar a las líneas trigonométricas.

La función <u>seno</u> se relaciona con el eje "y",

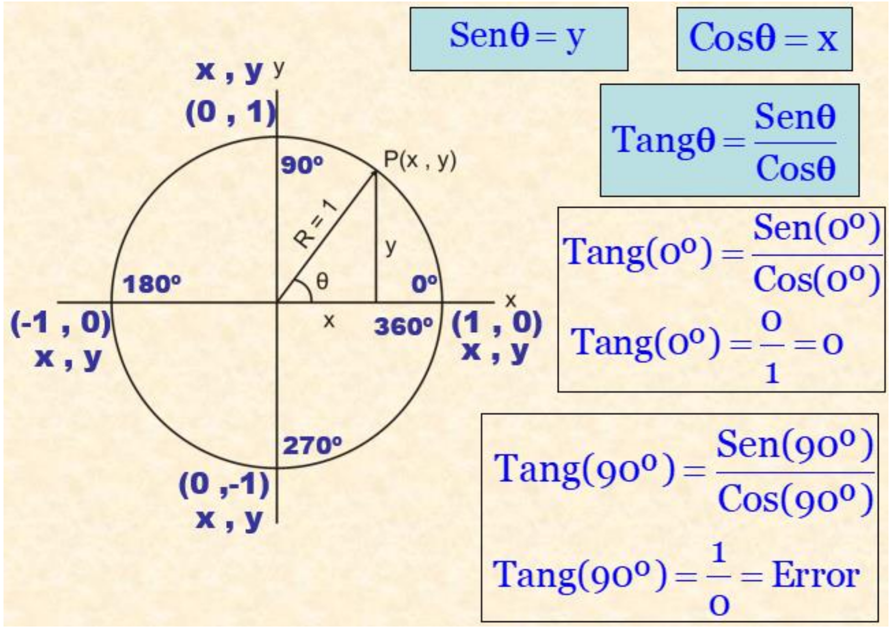
La función <u>Coseno</u> se relaciona con el eje "x"



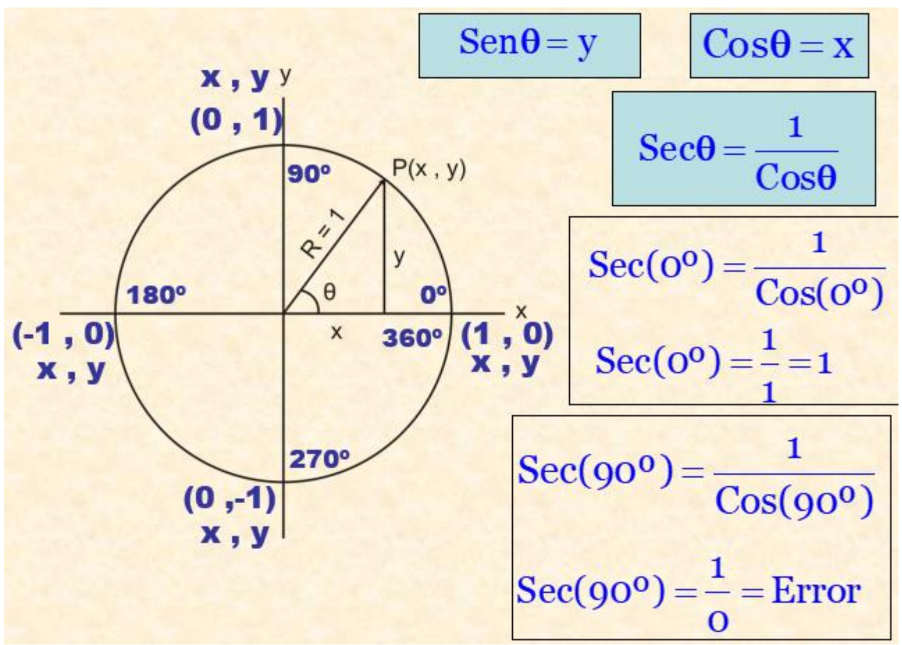
Ejemplo: Miremos el seno y coseno de los ángulos principales



Ejemplo: Miremos tangente de los ángulos principales

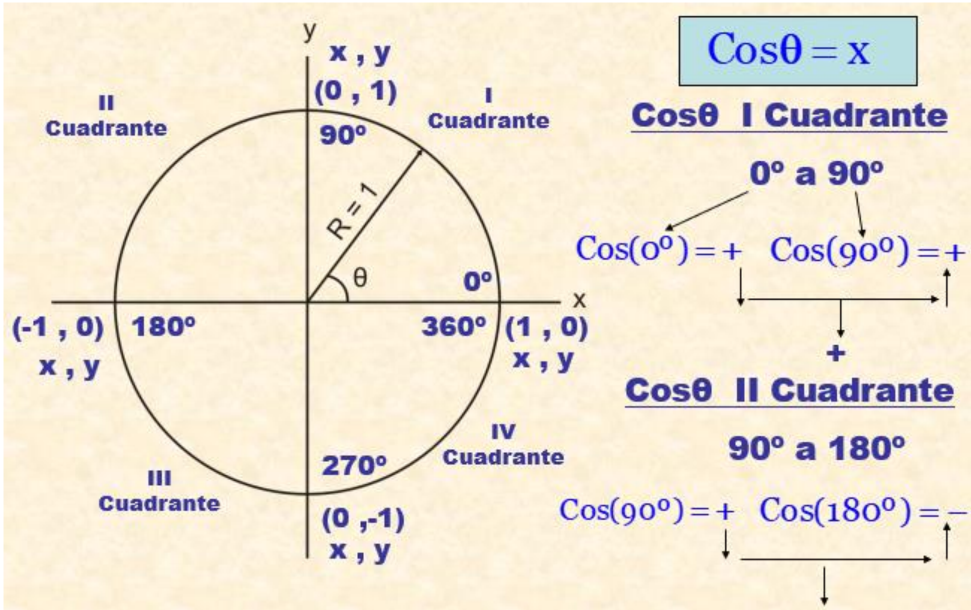


Ejemplo: Miremos Secante de los ángulos principales

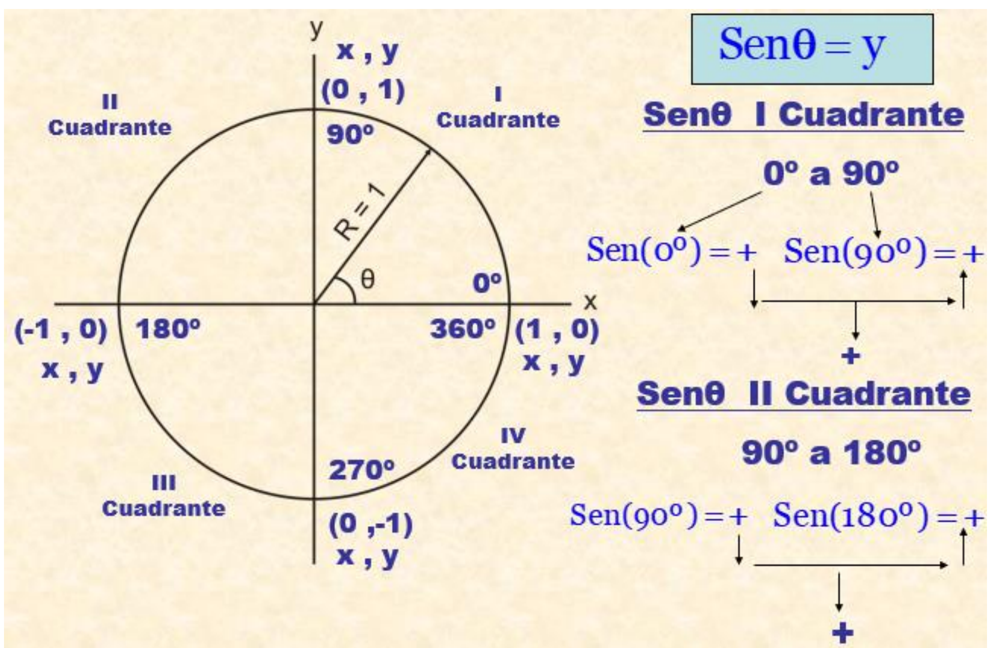


SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

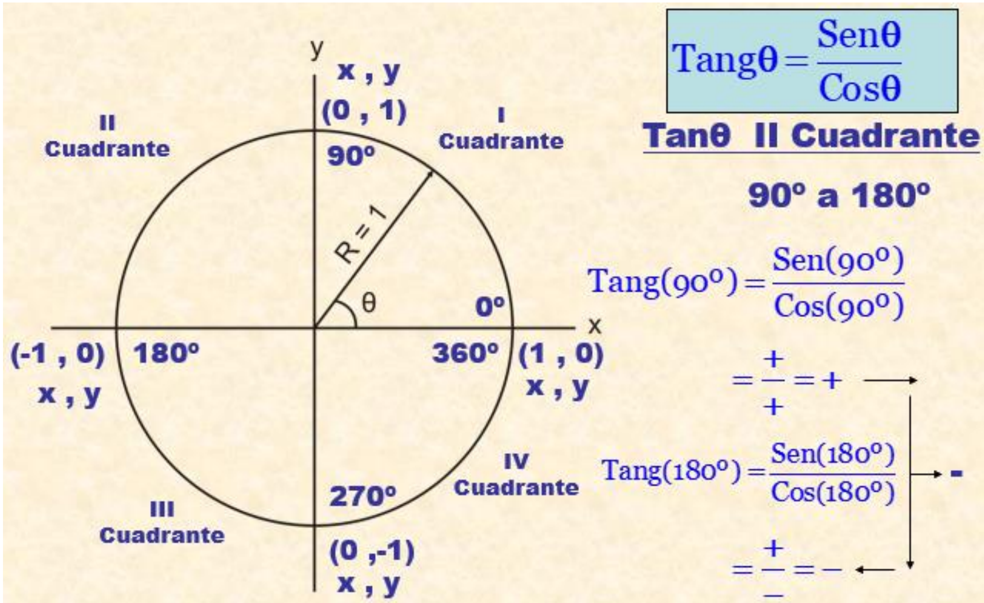
Ejemplo: Miremos los signos de la función Coseno en el I y II cuadrante



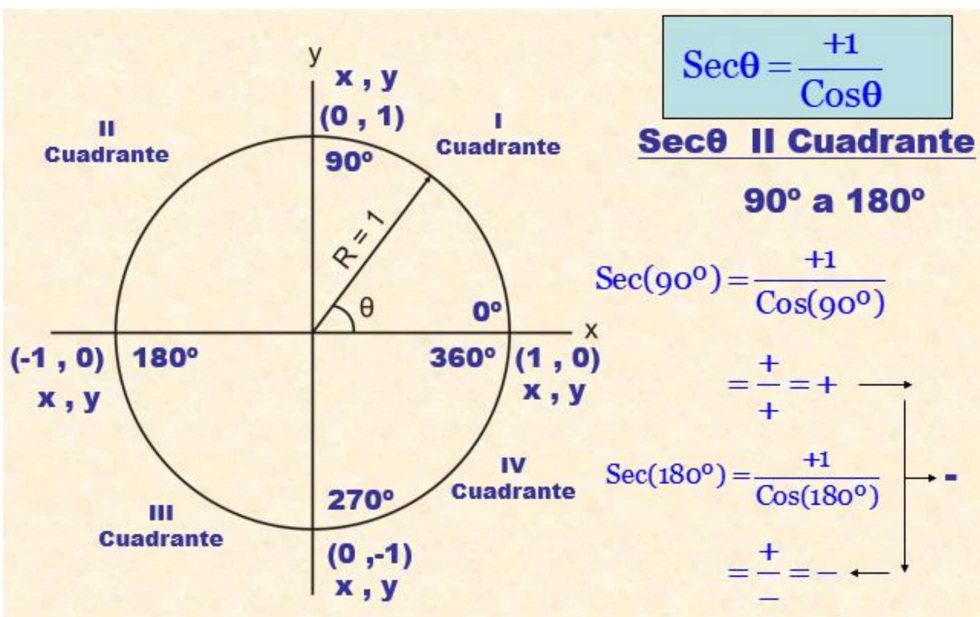
Ejemplo: Miremos los signos de la función Seno en el I y II cuadrante



Ejemplo: Miremos los signos de la función Tangente en el II cuadrante

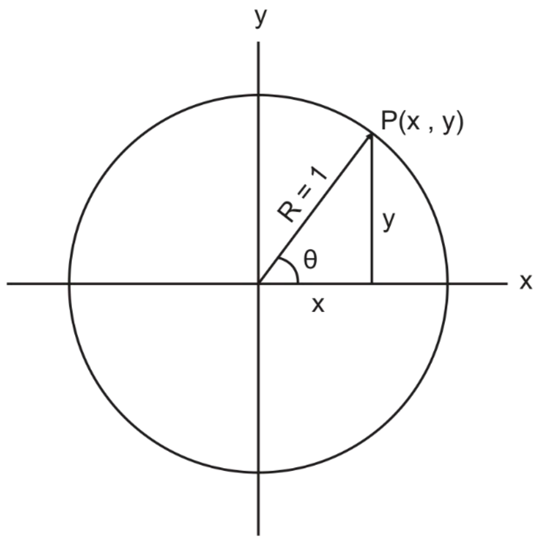


Ejemplo: Miremos los signos de la función Secante en el II cuadrante



Identidades Trigonométricas

Vamos a partir del círculo unitario:



Se observa un triángulo rectángulo inscrito en el círculo, donde el radio vale R = 1, tiene los catetos: “x”, “y”

Aplicamos Pitágoras ya que hay un ángulo de 90°

$y^2 + x^2 = (1)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 + x^2 = 1$

Recordemos que la función seno está relacionada con la variable “y”, la función Coseno esta relacionada con la función “x”.

$\text{Sen}\theta = y, \quad \text{Cos}\theta = x$

Reemplazando en: $x^2 + y^2 = 1$

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$$

Esta es la identidad fundamental de la trigonométrica

En el siguiente cuadro se visualizan otras identidades trigonométricas:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares e impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Ejemplo

Simplifiquemos la siguiente expresión:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$$

Tenemos una suma de fraccionario la cual debemos hacer:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Distribuya sen } \theta \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Identidad de Pitágoras} \\
&= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta && \text{Cancele y use identidad recíproca}
\end{aligned}$$

Fórmulas de Suma y Resta para la función Seno y Coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \textbf{(1)}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \textbf{(3)}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \textbf{(4)}$$

Ejemplo:
Simplificar el siguiente ejercicio:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Debemos aplicar la fórmula de resta para la función Coseno:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta \qquad \left(\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0 \quad \text{y} \quad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0 + 1 \cdot \sin\theta = \sin\theta$$

Ejemplo:
Encuentre el valor exacto de:

$$\text{Sin}\frac{7\pi}{12}$$

Podemos formar una suma:

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Por último, aplicamos la fórmula de suma para la función seno

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

Recordemos que π/4 = 45°, π/3 = 60°

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

Ejemplo

Verificar la siguiente identidad

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\cot\alpha\cot\beta+1$$

Solución

$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$	Fórmula Resta Coseno
$=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$	Formar Suma de Fraccionarios
$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+1$	Simplificar
$=\cot\alpha\cot\beta+1$	Aplicar identidades

Fórmulas de Suma y Resta para la función Tangente

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \textbf{(5)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \textbf{(6)}$$

Ejemplo

Simplificar el siguiente ejercicio:

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

Debemos aplicar la fórmula de tangente: $\mathrm{Tan}\theta=\frac{\mathrm{Sin}\theta}{\mathrm{Cos}\theta}$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\sin\theta)(0) + (\cos\theta)(1)}{(\cos\theta)(0) - (\sin\theta)(1)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

Fórmulas de ángulo doble para Seno y Coseno

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \qquad (7)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad (8)$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta \qquad (9)$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \qquad (10)$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad (11)$$

RÚBRICA

ÁREA	TEMA QUE SE VALORA	DESEMPEÑO SUPERIOR	DESEMPEÑO ALTO	DESEMPEÑO BÁSICO	DESEMPEÑO BAJO
Estadística	Formular y resolver situaciones de la vida real en las que se aplican los sistemas de medición angular y las funciones trigonométricas	Da solución a diferentes situaciones de la vida real aplicando los sistemas de medición angular y las funciones trigonométricas	Da solución a algunas situaciones de la vida real aplicando los sistemas de medición angular y las funciones trigonométricas	Da solución a algunas situaciones de la vida real aplicando los sistemas de medición angular y las funciones trigonométricas	Se le dificulta dar solución a diferentes situaciones de la vida real aplicando los sistemas de medición angular y las funciones trigonométricas

OswaldoMc
Correo de Oswaldo Muñoz Cuartas: icfeslasalle@gmail.com