Geometría Grado Undécimo (Primer Período)

La Circunferencia

- ✓ Aplicar los elementos y las ecuaciones de una circunferencia para resolver problemas de la vida real.
- ✓ Utilizar las tecnologías de la información y comunicación para investigar información de la circunferencia y sus elementos.

Definición de Circunferencia

Una circunferencia es una curva formada por puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, el cual se representa en la figura 1. Cabe señalar que el término circunferencia también se utiliza para designar el perímetro del círculo.

Equidistan significa que están a la misma distancia.

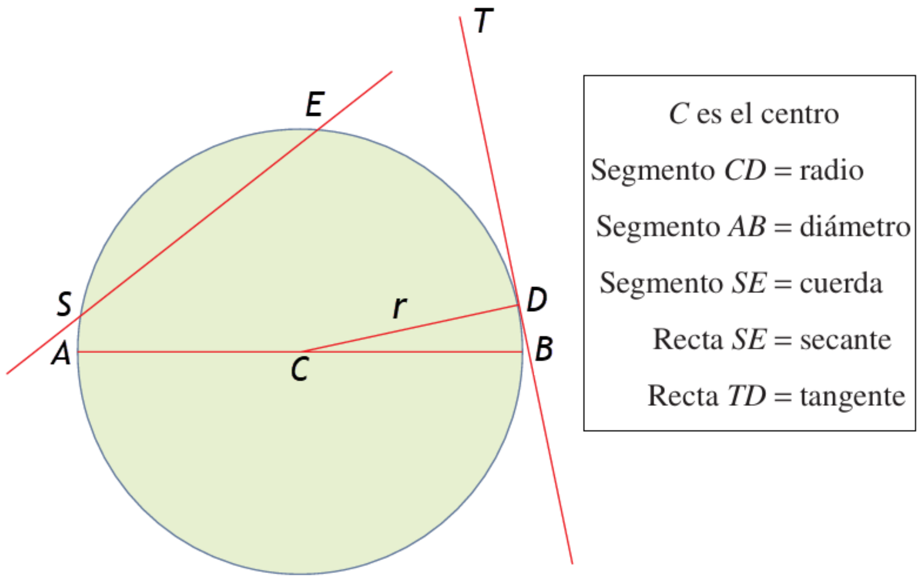
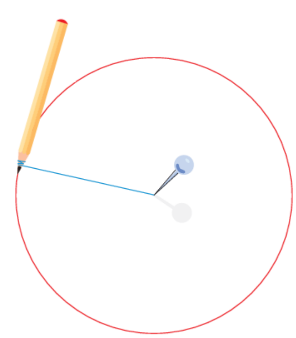


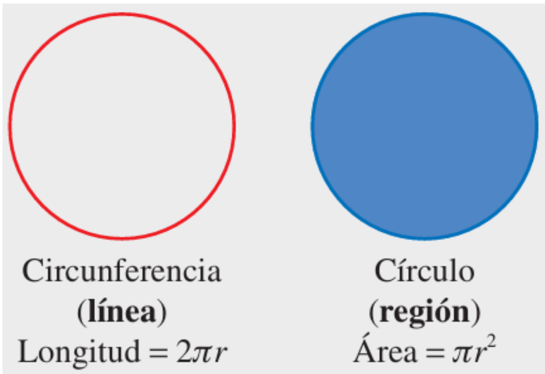
Figura 1. Circunferencia y sus elementos

- ✓ **Una secante** es una recta que corta a la circunferencia en dos de sus puntos.
- ✓ **Una tangente** es una recta que toca a la circunferencia en un solo punto.

Trazando una Circunferencia con un hilo y tachuela

Una tachuela se amarra al extremo de un hilo y se fija a una mesa. El otro extremo del hilo se amarra a la punta de un lápiz con una distancia igual al radio escogido. Manteniendo tenso el hilo, se desliza de manera continua el lápiz hasta completar el trazo de la curva.	

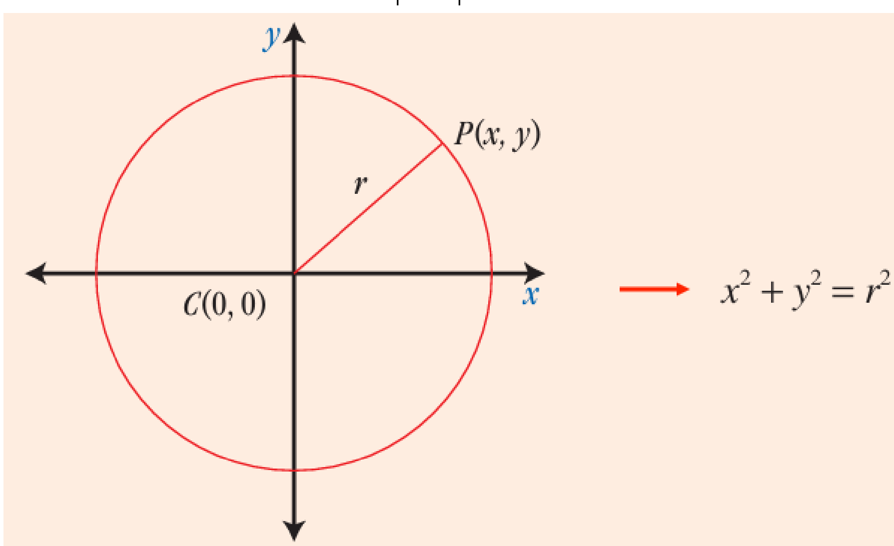
Observación: Diferencia entre circunferencia y circulo:

	La **Circunferencia** es una línea (posee longitud). L = 2πr El **Círculo** es una región (posee área) Área = πr^2

Circunferencia con centro en el origen

Por definición sabemos que para cualquier punto P (x, y) sobre la circunferencia, su distancia al centro C (0, 0) es igual al radio r:

$$|PC| = r$$



Para hallar la distancia (radio) del centro “C” al punto “P”, usamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$|PC| = r \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = r \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

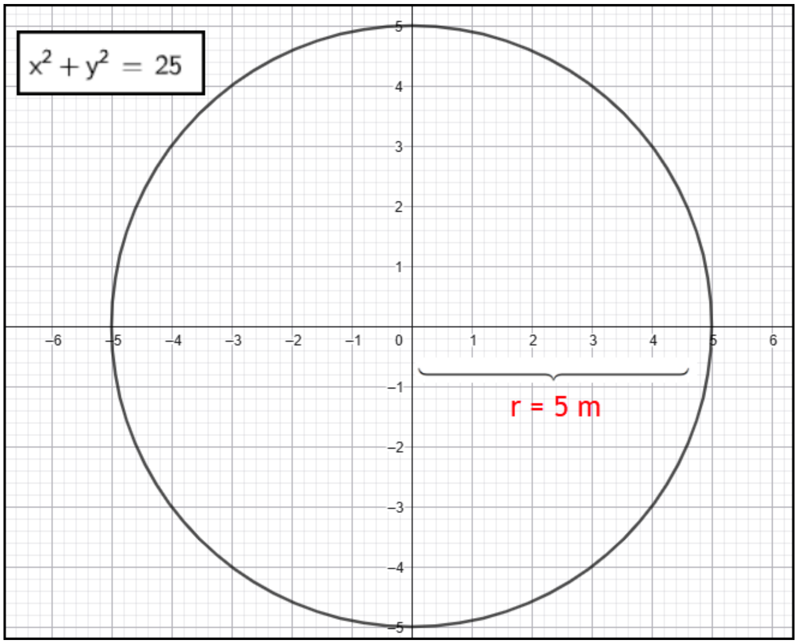
Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad para simplificar el radical, tenemos la ecuación de una circunferencia con centro en el origen.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo
Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, cuyo radio mide 5 unidades:
Como el centro es el origen (0, 0), y el radio es 5, usamos la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 = (5)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

GeoGebra para hacer el gráfico de la circunferencia:
https://www.geogebra.org/classic?lang=es



Ejemplo

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, cuyo radio mide 5 unidades:
Como el centro es el origen (0, 0), y el radio es $\sqrt{6}$, usamos la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 6$$

Ejemplo

Determina si el punto P (3, –1) pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$
Para verificar si este punto pertenece a la circunferencia, hacemos x = 3, y = –1 en la ecuación, y mostrar que se cumple una igualdad.

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow (3)^2 + (-1)^2 = 4 \rightarrow 9 + 1 = 4 \rightarrow 10 = 4$$

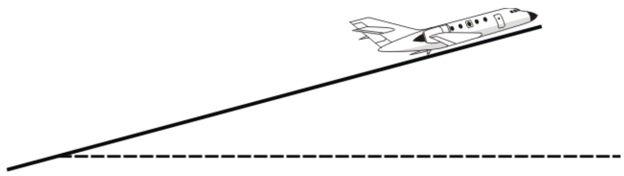
La igualdad es falsa, ya que 10 es diferente de 4

Ver vídeo

El siguiente vídeo nos muestra un ejemplo sobre la ecuación de una circunferencia con centro en el origen:
https://www.youtube.com/watch?v=VJq02PKiAGo

Repaso sobre rectas paralelas y rectas perpendiculares

La siguiente figura muestra la trayectoria de un avión que vuela a lo largo de una línea recta poco después de despegar.



¿Cómo se mide la inclinación de la trayectoria de vuelo del avión (con respecto a la horizontal)? Para responder a estas preguntas, tenemos que definir la inclinación o la pendiente de una línea recta.

Definición de la pendiente

La pendiente de una recta en un sistema de representación triangular, suele ser representado por la letra m, y es definido cambio o diferencia en el eje y dividido por el respectivo cambio en el eje x, entre 2 puntos de la recta.

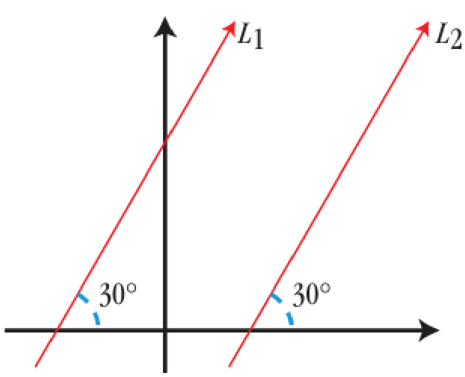
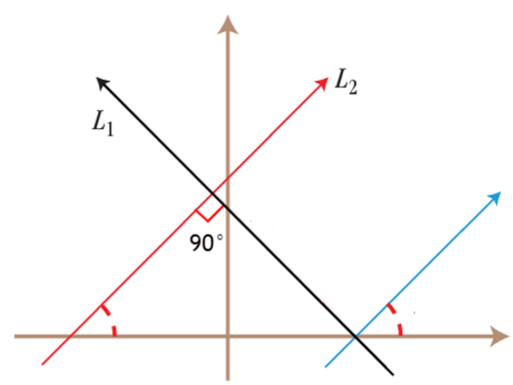
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ejemplo

Determinar la pendiente de la línea recta que pasa por los puntos (2, 10) y (4, 20):

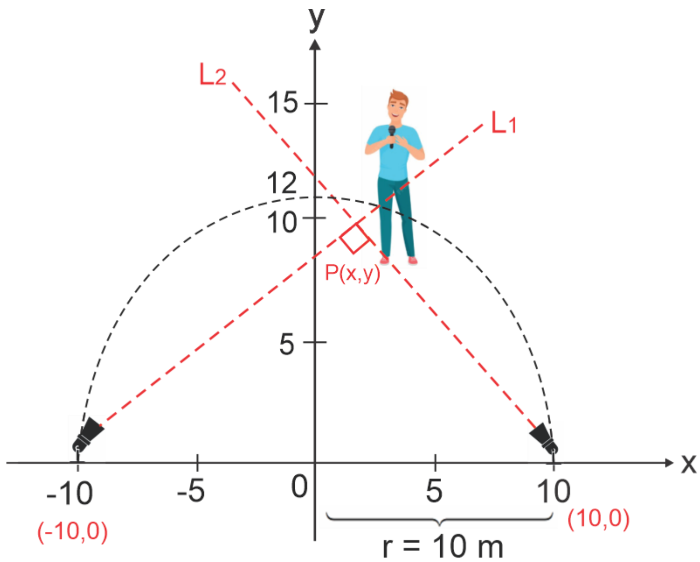
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \rightarrow \quad m = \frac{20 - 10}{4 - 2} = \frac{10}{2} = 5$$

Por cada unidad que aumente la variable “x”, entonces, hay un aumento de **5 unidades** en la variable “y”.

Rectas paralelas	**Rectas perpendiculares**
Dos rectas L_1 y L_2 son parales si, y solo si, sus pendientes son iguales.  $m_1 = m_2$	Forman un **ángulo de 90°** cuando se cruzan. Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si, y sólo si, el producto de sus pendientes es igual –1.  $m_1\, m_2 = -1$

Problema práctico

A 20 metros de distancia, en los extremos de un escenario que tiene 12 metros de ancho, se dispusieron dos reflectores de forma que, en un momento determinado del concierto, mientras giran de un lado a otro, cruzarán sus haces de luz formando a cada instante un ángulo de 90°. el artista se desplazará en el escenario sobre un arco de esta circunferencia, calcular la ecuación de dicha circunferencia empleando la propiedad de las rectas perpendiculares.



El artista **se puede mover** sobre una circunferencia **de radio de radio 10 metros**, pero puede moverse 2 metros más ya que el escenario tiene 12 metros de ancho.
Tenemos las rectas L_1 y L_2 que se cortan en un punto común P (x, y):

✓ Recta L_1 pasa por los puntos: A (–10, 0), P (x, y), su pendiente es:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m_1 = \frac{y-0}{x-(-10)} \rightarrow m_1 = \frac{y}{x+10}$$

✓ Recta L_2 pasa por los puntos: B (10, 0), P (x, y), su pendiente es:

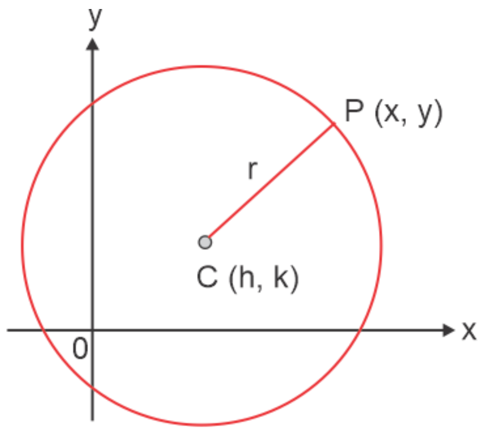
$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m_2 = \frac{y-0}{x-10} \rightarrow m_2 = \frac{y}{x-10}$$

Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, ya que forman un ángulo de 90° cuando se cruzan, entonces aplicamos la propiedad:

$$m_1 m_2 = -1 \rightarrow \left(\frac{y}{x+10}\right)\left(\frac{y}{x-10}\right) = -1 \rightarrow \frac{y^2}{x^2+10x-10x-100} = -1 \rightarrow \frac{y^2}{x^2-100} = -1$$

$$y^2 = -x^2 + 100 \rightarrow x^2 + y^2 = 100 \quad \left(r^2 = 100,\ r = \sqrt{100},\ r = 10m\right)$$

Circunferencia con centro fuera del origen



Para hallar la distancia del centro “C” al punto “P” (radio), usamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$|PC| = r \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevamos al cuadrado para simplificar la raíz:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

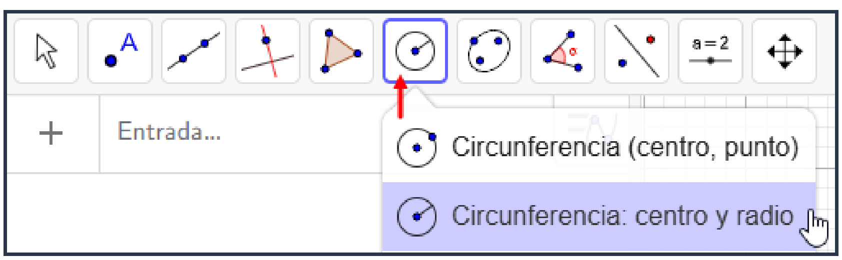
Ejemplo

Una circunferencia tiene centro en C (–1, 5) y radio r = 6. Obtén su ecuación y su gráfica.
En este caso tenemos que h = –1 y k = 5, sustituyamos valores en la ecuación de la circunferencia:

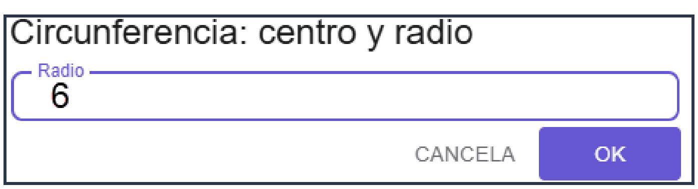
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-(-1))^2 + (y-5)^2 = 6^2 \quad \rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-5)^2 = 36$$

GeoGebra para hacer el gráfico de la circunferencia:
https://www.geogebra.org/classic?lang=es

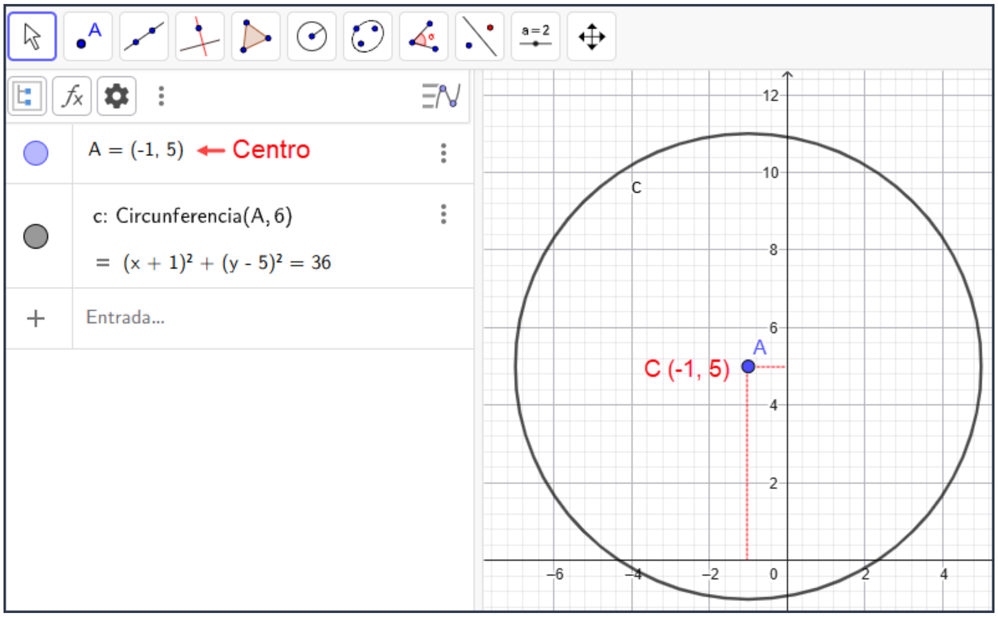
Usa la herramienta "**Circunferencia centro y radio**”



Hacemos un PUNTO en la cuadricula del programa, y nos pide colocar el valor del Radio:



Colocamos los valores del centro en el punto A, en nuestro caso son C (–1, 5)



Ejemplo

Determina el centro y el radio de la circunferencia con ecuación:

$$(x-4)^2+(y+2)^2=9$$

Comparando con el modelo:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-4)^2+(y+2)^2=9 \quad \rightarrow \quad (x-\boxed{4})^2+(y-\boxed{(-2)})^2=(\boxed{3})^2$$

El centro es C (h, k) = (4, –2) y el radio es r = 3

Ejemplo

Determina el centro y el radio de la circunferencia con ecuación:

$$(x+7)^2+y^2=12$$

Comparando con el modelo:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x+7)^2+y^2=12 \quad \rightarrow \quad (x-\boxed{(-7)})^2+(y-\boxed{0})^2=\boxed{\sqrt{12}}^2$$

El centro es C (h, k) = (–7, 0) y el radio es $r=\sqrt{12}$

Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia tiene la siguiente forma:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Repaso del cuadrado de un Binomio

El cuadrado de un binomio se obtiene así:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Ejemplo de cuadrado de un Binomio

$$(x+5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 \rightarrow (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Ejemplo

Escribe la ecuación general de la circunferencia: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Aplicando el cuadrado de un binomio tenemos:

$$x^2 + 2(x)(5) + (5)^2 + y^2 - 2(y)(3) + (3)^2 = 25 \rightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

Igualando a cero y simplificando logramos obtener la ecuación general:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$$

Ver vídeo

El siguiente vídeo nos muestra como encontrar el centro y el radio de una ecuación general de la circunferencia:

https://www.youtube.com/watch?v=5o1NkqZ0ET4

Ejemplo

En la siguiente ecuación general de la circunferencia encontrar el centro y el radio:

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$$

Debemos agrupar los términos de la ecuación, los de la variable "x" y los de la variable "y", para luego formar los trinomios cuadrados perfectos: TCP

$$\left(x^2 + 8x + \boxed{}\right) + \left(y^2 - 4y + \boxed{}\right) + 4 - \boxed{} - \boxed{} = 0$$

Para encontrar los valores que permiten formar los TCP, se hace lo siguiente:

✓ Para la variable “x”:

La mitad del coeficiente de “x” y se eleva al cuadrado

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = (4)^2 = 16$$

✓ Para la variable “y”:

La mitad del coeficiente de “y” y se eleva al cuadrado

$$\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = (2)^2 = 4$$

$$\left(x^2 + 8x + \boxed{16}\right) + \left(y^2 - 4y + \boxed{4}\right) + 4 - \boxed{16} - \boxed{4} = 0$$

Tenemos 2 trinomios, debemos factorizarlos:

$$\left(x^2 + 4\right)^2 + \left(y^2 - 2\right)^2 - 16 = 0 \rightarrow \left(x^2 + 4\right)^2 + \left(y^2 - 2\right)^2 = 16 \rightarrow \left(x^2 - \boxed{-4}\right)^2 + \left(y^2 - \boxed{2}\right)^2 = (4)^2$$

El centro de la circunferencia C (h, k) = (– 4, 2). El valor del radio es r = 4

Observación: Para verificar los resultados, a partir de la ecuación general de la circunferencia, tenemos las siguientes fórmulas:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right), \quad \text{Radio} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

En el ejercicio anterior:

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$$

La D = 8, E = – 4, F = 4

$$\text{Centro} = \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right) = \left(\frac{-8}{2}, \frac{-(-4)}{2}\right) = (-4,\ 2)$$

|