Matemáticas Grado Undécimo (Primer Período)

RELACIONES DE ORDEN EN LOS REALES (DESIGUALDADES)

Una de las propiedades fundamentales en las relaciones de orden es propiedad de tricotomía que dice lo siguiente:

Dado cualquier número real x, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a. $x > 0$ (mayor : positivo)   b. $x = 0$ (igual)   c. $x < 0$ (menor : negativo)

Algunas propiedades que permiten consolidar toda la teoría de las desigualdades:

1. Propiedad transitiva: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

$$\text{si: } a = 2,\ b = 4,\ c = 6; \qquad 2 < 4 \text{ y } 4 < 6 \ \rightarrow \ 2 < 6 \ (\text{cumple})$$

2. Para cualquier real c, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

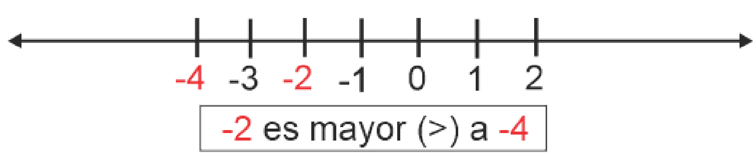
$$\text{si: } a = 2,\ b = 4,\ c = 6; \qquad 2 < 4 \ \rightarrow \ 2 + 6 < 4 + 6, \ \rightarrow \ 8 < 10 \ (\text{cumple})$$

3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$

$$\text{si: } a = 2,\ b = 4,\ c = 6; \quad (2 < 4,\ \ 6 > 0) \ \rightarrow \ 2(6) < 4(6) \ \rightarrow \ 12 < 24 \ (\text{cumple})$$

4. $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

$$\text{si: } a = 2,\ b = 4,\ c = -1; \quad (2 < 4,\ \ -1 < 0) \ \rightarrow \ 2(-1) > 4(-1) \ \rightarrow \ -2 > -4 \ (\text{cumple})$$



5. $a < b$, entonces $-a > -b$ (si cambio los signos, cambia el orden de la desigualdad)

$$\text{si: } a = 2,\ b = 4, \quad 2 < 4 \ \rightarrow \ -2 > -4 \ (\text{cambia el orden de la desigualdad})$$

6. Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos

$$\text{si: } a = 2,\ b = 4, \quad (2(4) > 0 \rightarrow 8 > 0), \quad ((-2)(-4) > 0 \rightarrow 8 > 0) \ (\text{cumplen})$$

Tipos de intervalos

Nombre	Notación	Notación Conjuntista
Cerrados	[a, b]	$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$
Abiertos	(a, b)	$\{x \in R / a < x < b\}$
Semiabiertos o semicerrados	[a, b)	$\{x \in R / a \leq x < b\}$
	(a, b]	$\{x \in R / a < x \leq b\}$
Al infinito	[b, ∞)	$\{x \in R / b \leq x\}$
	(b, ∞)	$\{x \in R / b < x\}$
	(– ∞, a]	$\{x \in R / x \leq a\}$
	(– ∞, a)	$\{x \in R / x < a\}$

Vídeo sobre desigualdades:
https://www.youtube.com/watch?v=I06hz1Jz8JA&list=PLC6o1uTspYwFK5jWSaHTre9fAKgy3puM2

Ejemplo

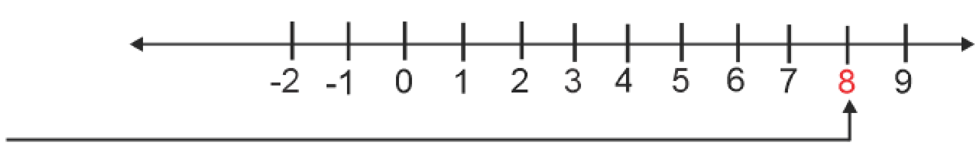
Resuelve la siguiente desigualdad lineal:

$$3x - 9 < 7 + x$$

Procedemos a despejar la variable “x”:

$$3x - 9 < 7 + x \quad \rightarrow \quad 3x - x < 7 + 9 \quad \rightarrow \quad 2x < 16 \quad \rightarrow \quad x < 16/2 \quad \rightarrow \quad x < 8$$

Los números menores que 8 son aquellos que vienen desde menos infinito hasta 8 sin incluirlo.



El intervalo solución es: (– ∞, 8), no incluye el valor de 8 (solo aparece menor “<” en el ejercicio).
Para verificar la respuesta, escogemos un valor que este en este intervalo, por ejemplo: el número 5. Reemplacemos en el ejercicio este valor:

$$3x-9<7+x \quad \rightarrow \quad 3(5)-9<7+5 \quad \rightarrow \quad 15-9<12 \quad \rightarrow \quad 6<12 \ \text{(cumple)}$$

Ejemplo

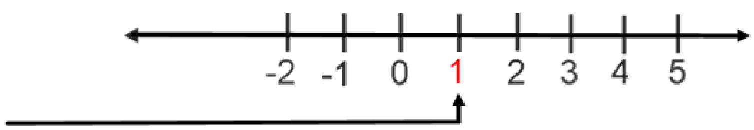
Resuelve la siguiente desigualdad lineal:

$$-3x+2 \geq 1-2x$$

Procedemos a despejar la variable “x”:

$$-3x+2 \geq 1-2x \quad \rightarrow \quad -3x+2x \geq 1-2 \quad \rightarrow \quad -x \geq -1 \quad \rightarrow \quad x \leq 1$$

Si cambio los signos, entonces, cambia el orden de la desigualdad.



El intervalo solución es: (– ∞, 1], incluye el valor de 1 (aparece mayor igual “≥” en el ejercicio)

Ejemplo

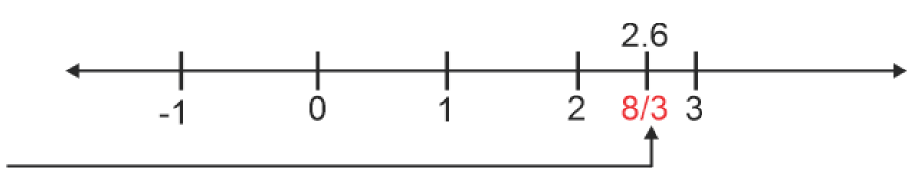
Resuelve la siguiente desigualdad lineal:

$$5-\frac{3x}{4} \geq 3$$

Procedemos a despejar la variable “x”:

$$5-\frac{3x}{4} \geq 3 \quad \rightarrow \quad -\frac{3x}{4} \geq 3-5 \quad \rightarrow \quad -\frac{3x}{4} \geq -2 \quad \rightarrow \quad -3x \geq -8 \quad \rightarrow \quad 3x \leq 8 \quad \rightarrow \quad x \leq 8/3$$

Si cambio los signos, entonces, cambia el orden de la desigualdad.



El intervalo solución es: (– ∞, 8/3], incluye el valor de 8/3 (aparece mayor igual “≥” en el ejercicio).

Ejemplo

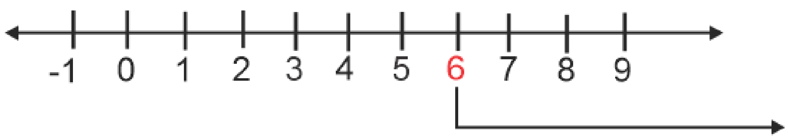
Resuelve la siguiente desigualdad lineal:

$$3(x-4)+2(x+3) \geq 24$$

Hacemos la ley distributiva y luego se procede a despejar la variable “x”:

$$3(x-4)+2(x+3) \geq 24 \quad \rightarrow \quad 3x-12+2x+6 \geq 24 \quad \rightarrow \quad 5x-6 \leq 24 \quad \rightarrow \quad 5x \geq 24+6$$

$$5x \geq 30 \quad \rightarrow \quad x \geq 30/5 \quad \rightarrow \quad x \geq 6$$



El intervalo solución es: [6, + ∞), incluye el valor de 6 (aparece mayor igual “≥” en el ejercicio)

Ejemplo

Resuelve la siguiente desigualdad lineal:

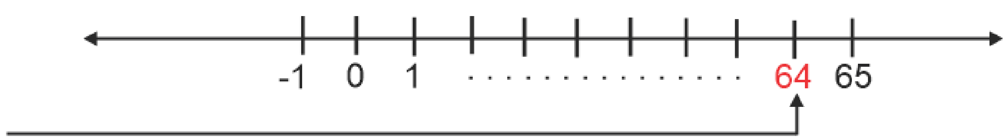
$$\frac{x+2}{6}-\frac{x+1}{5} > -2$$

Aplicamos resta de dos fraccionarios, luego despejamos la variable “x”:

$$\frac{x+2}{6}-\frac{x+1}{5} > -2 \quad \rightarrow \quad \frac{5(x+2)-6(x+1)}{30} > -2 \quad \rightarrow \quad \frac{5x+10-6x-6}{30} > -2 \quad \rightarrow \quad \frac{-x+4}{30} > -2$$

$$-x+4 > -60 \quad \rightarrow \quad -x > -60-4 \quad \rightarrow \quad -x > -64 \quad \rightarrow \quad x < 64$$

Si cambio los signos, entonces, cambia el orden de la desigualdad.



El intervalo solución es: (– ∞, 64), no incluye el valor de 64 (aparece mayor “>” en el ejercicio)

Vídeo sobre desigualdades:
https://www.youtube.com/watch?v=IPqMmbQK4D4

Ejemplo

Resuelve la siguiente desigualdad lineal:

$$11 \geq 3x-1 \geq -1$$

Esta desigualdad se parte en dos, y luego se hace la intersección; es decir, lo común:

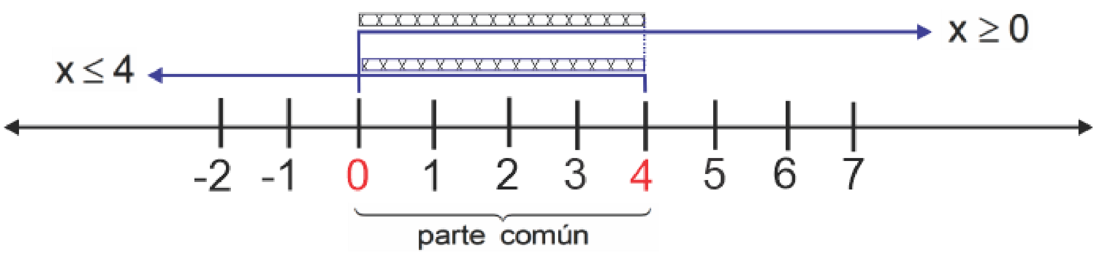
$11 \geq 3x - 1$ y $3x - 1 \geq -1$

✓ $11 \geq 3x - 1 \rightarrow -3x \geq -1 - 11 \rightarrow -3x \geq -12 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 12/3 \rightarrow$ $x \leq 4$

Si cambio los signos, entonces, cambia el orden de la desigualdad.

✓ $3x - 1 \geq -1 \rightarrow 3x \geq -1 + 1 \rightarrow 3x \geq 0 \rightarrow x \geq 0/3 \rightarrow$ $x \geq 0$

Hacemos un gráfico para ambas soluciones y sacamos la parte común:



El intervalo solución es: [0, 4], ya que es la parte común, incluye el valor de 0 y 4

<u>Observación</u>: En el caso que no haya nada en común, entonces no hay solución: Vacío (Φ)

Problema en contexto

Un carnaval tiene dos planes para boletos Plan A: Cuota de U$ 30 la entrada y $ 2 cada juego mecánico Plan B: Cuota de U$ 16 la entrada y $ 4 cada juego mecánico.
¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

Sea x = Número de viajes en juego mecánico.

En palabras	En Álgebra
Número de viajes	"x"
Costo con Plan A	30 + 2x
Costo con Plan B	16 + 4x

A continuación, formulamos el modelo:

Costo con Plan A < Costo con Plan B

$30 + 2x < 16 + 4x \rightarrow 2x - 4x < 16 - 30 \rightarrow -2x < -14 \rightarrow 2x > 14$

$x > {}^{14}/_{2} \quad \rightarrow \quad x > 7$

Entonces, si piensa **tomar mas de 7 viajes**, el **plan A** es menos costoso.
Problema en contexto

Martin debe tener un promedio de, al menos, 240 puntos en una serie de tres líneas de boliche para entrar a las eliminatorias. Si ha tenido puntuaciones de 220 y 210, ¿cuántos puntos debe anotar en el tercer juego para entrar a las eliminatorias?

Sea P = El puntaje para el tercer juego.

Martin necesita un promedio que sea igual o más a 240 puntos. El promedio sería la suma de las tres líneas dividido por 3.

$$\frac{220+210+P}{3} \geq 240 \quad \rightarrow \quad 430+P \geq 720 \quad \rightarrow \quad P \geq 720-430 \quad \rightarrow \quad P \geq 720-430 \quad \rightarrow \quad P \geq 290$$

Martín de anotar 290 puntos o más.

Problema en contexto

Mateo obtuvo puntuaciones de 95, 82, 93 y 84 en sus primeros cuatro exámenes del semestre. ¿Qué puntuación debe obtener en su quinto examen para que su promedio en los exámenes sea de 90 o mayor?

Problema en contexto

Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia. Plan A: U$ 25 por mes y U$ 0.05 por minuto Plan B: U$ 5 por mes y U$ 0.12 por minuto ¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B? (Es decir, para que sea más barato el plan B).

Inecuaciones cuadráticas (Desigualdades cuadráticas)

Las desigualdades cuadráticas en una variable son desigualdades de la forma:

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

Ejemplo

Resolver la desigualdad cuadrática:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

Primer paso:

Debemos factorizar el polinomio usando cualquier método. Se puede usar la fórmula general para encontrar las raíces r_1 y r_2.

$$ax^2+bx+c = a\,(x - r_1)\,(x - r_2)$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro ejercicio, a = 1 (coeficiente de x^2), b = 1 (coeficiente de “x”) y c = – 6:

$$r_1, r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \quad \rightarrow \quad r_1, r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \rightarrow \quad r_1, r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \quad \rightarrow \quad r_1, r_2 = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Salen 2 soluciones, una positiva y otra negativa:

$$\left(r_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2\right) \;\; \text{y} \;\; \left(r_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3\right) \rightarrow r_1 = 2, \;\; r_2 = -3$$

$$ax^2 + bx + c = 1(x-2)\big(x-(-3)\big) \quad \rightarrow \quad ax^2 + bx + c = (x-2)(x+3)$$

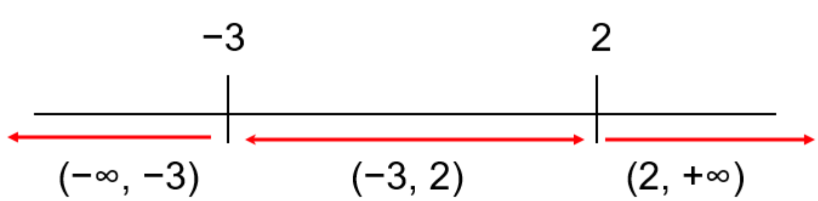
$$x^2 + x - 6 > 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x+3) > 0$$

Segundo paso:

Debemos aplicar el método de los intervalos, tenemos dos factores, se analizan ambos:

$x - 2 > 0 \;\rightarrow\; x > 2$	$x + 3 > 0 \;\rightarrow\; x > -3$

Estos valores: 2 y – 3 los ubicamos en la recta real:



Tenemos **tres** intervalos: Para cada intervalo escogemos un número cualquiera dentro de cada intervalo y lo evaluamos en el ejercicio. **Los números escogidos son:**

$x = -4$ (primer intervalo), **$x = 0$** (segundo intervalo), **$x = 3$** (tercer intervalo)

Intervalos	Ejercicio: $x^2 + x - 6$	Resultado
$(-\infty, -3)$, $x = -4$	$(-4)^2 + (-4) - 6 = 16 - 4 - 6 = 6$, $6 > 0$	> 0 (+)
$(-3, 2)$, $x = 1$	$(1)^2 + (1) - 6 = 1 + 1 - 6 = -4$, $-4 < 0$	< 0 (–)
$(2, +\infty)$, $x = 3$	$(3)^2 + (3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$, $6 > 0$	> 0 (+)

En el ejercicio piden los > 0 (+), por tanto, la solución es:

$$(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

Ejemplo

Resolver la desigualdad cuadrática:

$$6x^2 - x \leq 2$$

Debemos organizar la expresión cuadráticas:

$$6x^2 - x \leq 2 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - x - 2 \leq 0$$

Primer paso:
Debemos factorizar el polinomio usando cualquier método. Usaremos la fórmula general:

$$ax^2+bx+c = a\,(x - r_1)\,(x - r_2)$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro ejercicio, $a = 6$ (coeficiente de x^2), $b = -1$ (coeficiente de "x") y $c = -2$:

$$r_1, r_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)} \rightarrow r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \rightarrow r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} \rightarrow r_1, r_2 = \frac{1 \pm 7}{12}$$

Salen 2 soluciones, una positiva y otra negativa:

$$\left(r_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right) \text{ y } \left(r_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}\right) \rightarrow r_1 = \frac{2}{3},\ \ r_2 = \frac{-1}{2}$$

$$ax^2+bx+c=1\left(x-\tfrac{2}{3}\right)\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) \quad \rightarrow \quad ax^2+bx+c=\left(x-\tfrac{2}{3}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

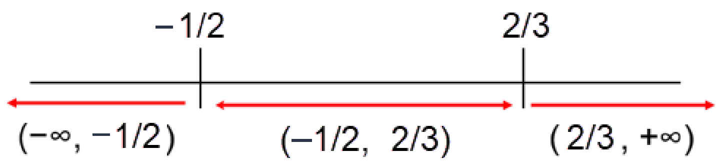
$$6x^2-x-2\le 0 \quad \rightarrow \quad \left(x-\tfrac{2}{3}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\le 0$$

Segundo paso:

Debemos aplicar el método de los intervalos, tenemos dos factores, se analizan ambos:

$x-\tfrac{2}{3}\le 0 \rightarrow \; x\le \tfrac{2}{3}$	$x+\tfrac{1}{2}\le 0 \;\rightarrow\; x\le -\tfrac{1}{2}$

Estos valores: 2/3 y – 1/2 los ubicamos en la recta real:



Tenemos **tres** intervalos: Para cada intervalo escogemos un número cualquiera dentro de cada intervalo y lo evaluamos en el ejercicio. **Los números escogidos son:**

x = – 2 (primer intervalo), **x = 0** (segundo intervalo), **x = 2** (tercer intervalo)

Intervalos	Ejercicio: $6x^2-x-2$	Resultado
(−∞, −1/2), x = – 2	$6(-2)^2-(-2)-2=24+2-2=24$, $24>0$	> 0 (+)
(−1/2, 2/3), x = 0	$6(0)^2-(0)-2=0-0-2=-2$, $-2<0$	< 0 (–)
(2/3, +∞), x = 2	$6(2)^2-(2)-2=24-2-2=20$, $20>0$	> 0 (+)

En el ejercicio piden los ≤ 0 (-), por tanto, la solución es:

$$\left[-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3}\right]$$

Inecuaciones Racionales (Desigualdades racionales)

Para resolver inecuaciones con racionales, se recomienda usar el método de análisis de signo (método del cementerio). **En inecuaciones con racionales se debe también desigualar a cero**.

Vídeo sobre inecuaciones con racionales

https://www.youtube.com/watch?v=_uW4nVdCWzQ

https://www.youtube.com/watch?v=7OoLfOeKCIA

Ejemplo

Resolver la desigualdad racional:

$$\frac{3}{x-2} > \frac{2}{x-3}$$

Primer paso:

Hay que desigualar a cero, realizar operaciones con fraccionarios, y establecer los factores que se analizaran:

$$\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3x-9-2x+4}{(x-2)(x-3)} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} > 0$$

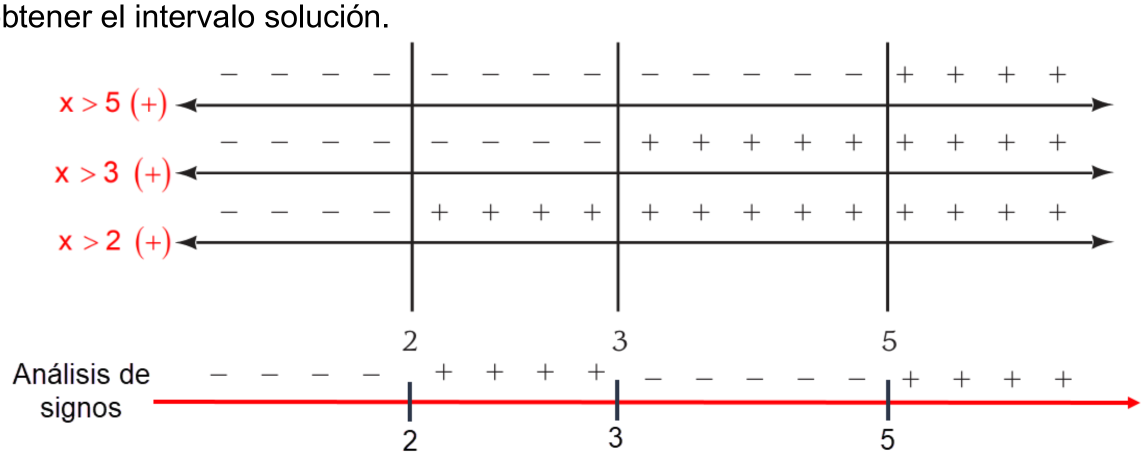
Debido a que la división por cero no es posible, entonces, en la solución no se puede tomar los valores: $x = 2$ ni $x = 3$

Se observa que quedan tres factores, y despajamos el valor de la variable “x” a cada uno:

$x-5>0 \rightarrow \; x>5\;(+)$	$x-2>0 \;\rightarrow\; x>2\;(+)$	$x-3>0 \;\rightarrow\; x>3\;(+)$

Segundo paso:

Hacemos un diagramo para visualizar los signos de los tres factores, se aplica ley de signos para obtener el intervalo solución.



En el ejercicio piden los > 0 (+), por tanto, la solución es:

$$(2,\ 3)\cup(5,+\infty)$$

Ejemplo

Resolver la desigualdad racional:

$$\frac{x-8}{x+4}\geq 5$$

Hay que desigualar a cero, realizar operaciones con fraccionarios, y establecer los factores que se analizaran:

$$\frac{x-8}{x+4}\geq 5 \;\rightarrow\; \frac{x-8}{x+4}-\frac{5}{1}\geq 0 \;\rightarrow\; \frac{x-8-5(x+4)}{x+4}\geq 0 \;\rightarrow\; \frac{x-8-5x-20}{x+4}\geq 0 \;\rightarrow\; \frac{-4x-28}{x+4}\geq 0$$

Debemos multiplicar por –1 la fracción (la variable “x” debe estar positiva), se da un cambio en la desigualdad.

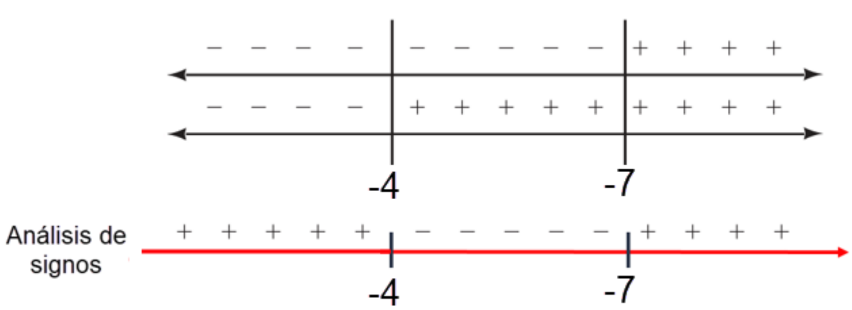
$$(-1)\,\frac{-4x-28}{x+4}\geq 0\,(-1) \;\rightarrow\; \frac{4x+28}{x+4}\leq 0$$

Se observa que quedan dos factores, y despajamos el valor de la variable “x” a cada uno:

$4x+28\leq 0 \rightarrow \quad 4x\leq -28 \quad \rightarrow\; x\leq -28/4 \;\rightarrow\; x\leq -7$	$x+4\leq 0 \;\rightarrow\; x\leq -4$

Segundo paso:

Hacemos un diagramo para visualizar los signos de los dos factores, se aplica ley de signos para obtener el intervalo solución.



En el ejercicio piden los ≤ 0 (-), por tanto, la solución es:

$$(-4,\ -7]$$

Observe que no incluye el valor de x = –1, ya que al reemplazar en el denominador este valor, se hace cero, y la división por cero no es posible.

Ejemplo

Resolver la desigualdad racional:

$$\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x+1} + 4$$

Primer paso:

Cómo tenemos 3 fraccionario, se recomienda hacer operaciones de a dos fraccionarios, sin dejar de desigualar a cero a lo último.

$$\frac{x}{2} - \frac{5}{x+1} \geq 4 \quad \rightarrow \quad \frac{x(x+1)-10}{2(x+1)} \geq 4 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+x-10}{2x+2} - \frac{4}{1} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+x-10-8x-8}{2x+2} \geq 0$$

$$\frac{x^2-7x-18}{2x+2} \geq 0$$

Debemos factoriza el numerador empleando cualquier método visto en clase:

$$x^2 - 7x - 18 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x-9)(x+2) \geq 0$$

En resumen, tenemos listo la expresión racional:

$$\frac{(x-9)(x+2)}{2x+2} \geq 0$$

Se observa que quedan tres factores, y despajamos el valor de la variable “x” a cada uno:

$x-9 \geq 0 \rightarrow x \geq 9$	$x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$	$2x+2 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -2 \rightarrow x \geq {-2}/{2} \rightarrow x \geq -1$

Segundo paso:

Hacemos un diagramo para visualizar los signos de dos tres factores, se aplica ley de signos para obtener el intervalo solución.

En el ejercicio piden los ≥ 0 (+), por tanto, la solución es:

$$(-2,\ -1)\cup(9,+\infty)$$

Observe que no incluye el valor de x = –1, ya que al reemplazar en el denominador este valor, se hace cero, y la división por cero no es posible.

Valor Absoluto

Si “x” es un número real, se define el valor absoluto de “x” como:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Ejemplos

$\lvert 5 \rvert = 5 \quad (\text{ya que } 5 > 0)$	$\lvert -2 \rvert = -(-2) = 2 \quad (\text{ya que } -2 < 0)$

Propiedades del valor absoluto

Con la desigualdad menor:

$$\boxed{|x| < a \quad \rightarrow \quad -a < x \quad y \quad x < a}$$

Con la desigualdad mayor:

$$\boxed{|x| > a \quad \rightarrow \quad x < -a \quad o \quad x > a}$$

Vídeo sobre inecuaciones con valor absoluto
https://www.youtube.com/watch?v=Bfb0efPKb-0

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación con valor absoluto:

$$|\,2x-3\,| \leq 5$$

Aplicamos la propiedad para para la desigualdad menor igual:

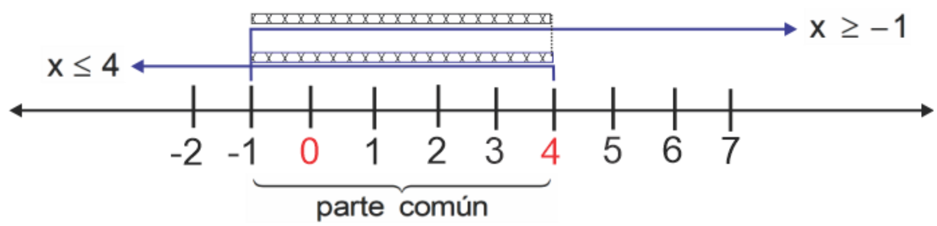
$$|\,2x-3\,| \leq 5 \quad \rightarrow \quad -5 \leq 2x-3 \quad \mathbf{y} \quad 2x-3 \leq 5$$

✓ $-5 \leq 2x-3 \quad \rightarrow \quad -2x \leq -3+5 \quad \rightarrow \quad -2x \leq 2 \quad \rightarrow \quad 2x \geq -2 \quad \rightarrow \quad x \geq {}^{-2}\!/_{2} \quad \rightarrow \quad x \geq -1$

Si cambio los signos, entonces, cambia el orden de la desigualdad.

- ✓ $2x-3 \leq 5 \quad \rightarrow \quad 2x \leq 5+3 \quad \rightarrow \quad 2x \leq 8 \quad \rightarrow \quad x \leq 8/2 \quad \rightarrow \quad x \leq 4$
- ✓

Hacemos un gráfico para ambas soluciones, miramos la parte común **("y" significa lo común)**



El intervalo solución es: [−1, 4], ya que es la parte común, incluye el valor de 0 y 4

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación con valor absoluto:

$$|4x-3| \geq 9$$

Aplicamos la propiedad para para la desigualdad mayor igual:

$|4x-3| \geq 9 \quad \rightarrow \quad 4x-3 \leq -9 \quad$ **o** $\quad 4x-3 \geq 9$

- ✓ $4x-3 \leq -9 \quad \rightarrow \quad 4x \leq -9+3 \quad \rightarrow \quad 4x \leq -6 \quad \rightarrow \quad x \leq -6/4 \quad \rightarrow \quad x \leq -3/2$
- ✓ $4x-3 \geq 9 \quad \rightarrow \quad 4x \geq 9+3 \quad \rightarrow \quad 4x \geq 12 \quad \rightarrow \quad x \geq 12/4 \quad \rightarrow \quad x \geq 3$

Hacemos un gráfico para ambas soluciones, unimos las partes **("o" significa unir)**