

Geometría Grado Undécimo (Segundo Período)

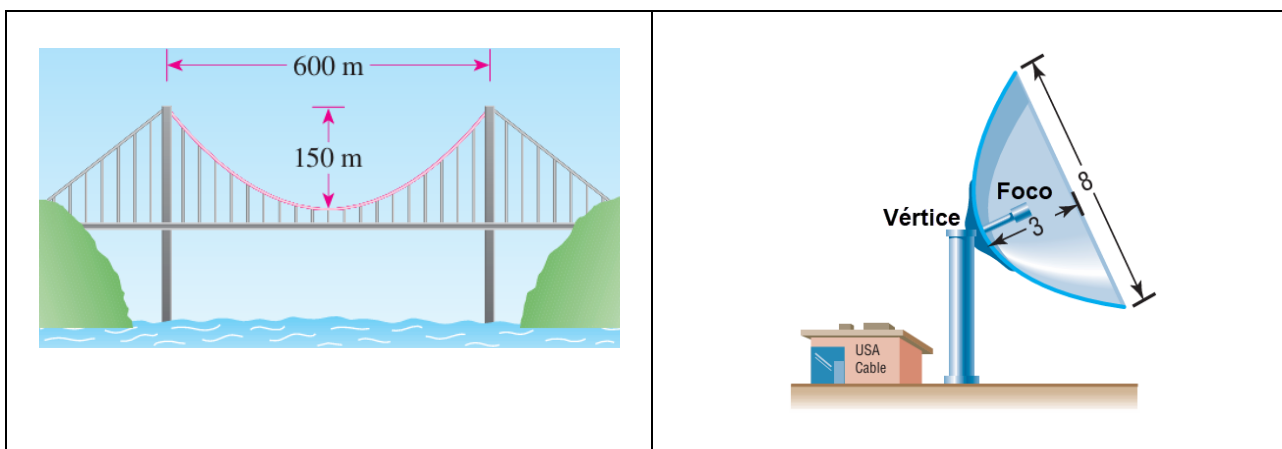
La Parábola

- ✓ Identificar los elementos asociados a la parábola.
- ✓ Reconocer la ecuación ordinaria y general de la parábola.
- ✓ Aplicar las propiedades de la parábola para solucionar problemas de la vida real.

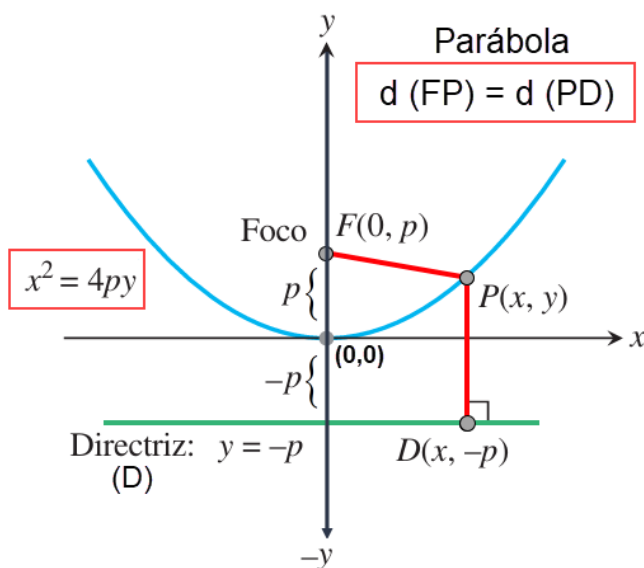
Definición de Parábola

Una parábola es una curva constituida por puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

Equidistan: Significa “a igual distancia”



Elementos de la parábola con vértice en el origen (0, 0)



Según la definición de la parábola:

$$\text{Distancia FP} = \text{Distancia PD}$$

Aplicamos la fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$FP=PD \rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2} \rightarrow \sqrt{x^2+(y-p)^2} = \sqrt{0^2+(y+p)^2}$$

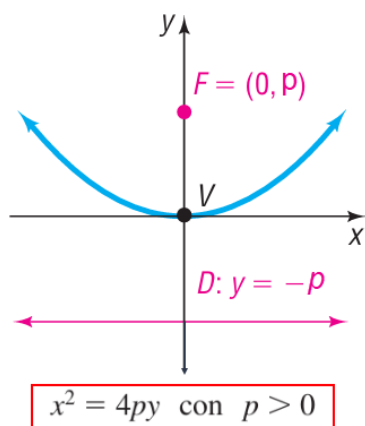
Elevamos al cuadrado para simplificar las raíces:

$$\left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(y+p)^2}\right)^2 \rightarrow x^2+(y-p)^2=(y+p)^2 \rightarrow x^2+y^2-2yp+p^2=y^2+2yp+p^2$$

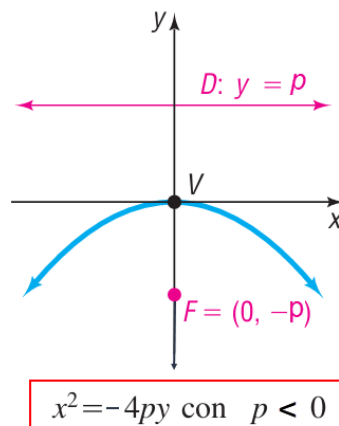
$$x^2-2yp=2yp \rightarrow x^2=2yp+2yp \rightarrow x^2=4yp \quad (p>0)$$

Resumen de las parábolas con vértice en el origen (0, 0):

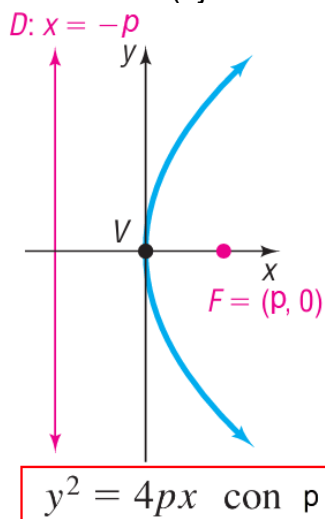
Parábola vertical (eje focal y): $p > 0$



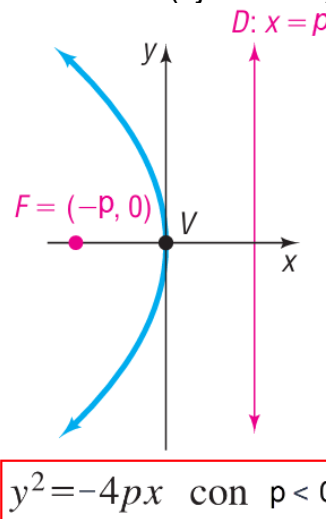
Parábola vertical (eje focal y): $p < 0$



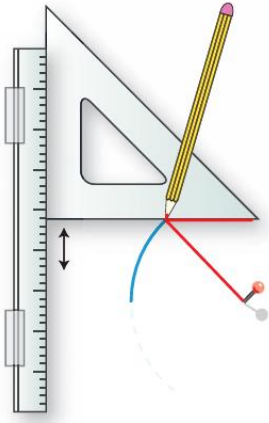
Parábola horizontal (eje focal x): $p > 0$



Parábola horizontal (eje focal x): $p < 0$



Construcción de una Parábola

	El extremo de un hilo se fija a la tachuela y el otro extremo al borde de una escuadra donde se coloca un lápiz. Se traza la parábola deslizando la escuadra a lo largo de la regla manteniendo el hilo tenso con la punta del lápiz. Conviene que el largo máximo del hilo sea el doble de la distancia que hay de la regla a la tachuela.
---	---

Simulador de Parábola (Foco y Directriz)

<https://phet.colorado.edu/es/simulations/graphing-quadratics>

Ejemplo

Halla la ecuación de la parábola con vértice $(0, 0)$ y foco $(0, 2)$, y dibuja su gráfica. Se pide encontrar el **lado recto**.

Solución

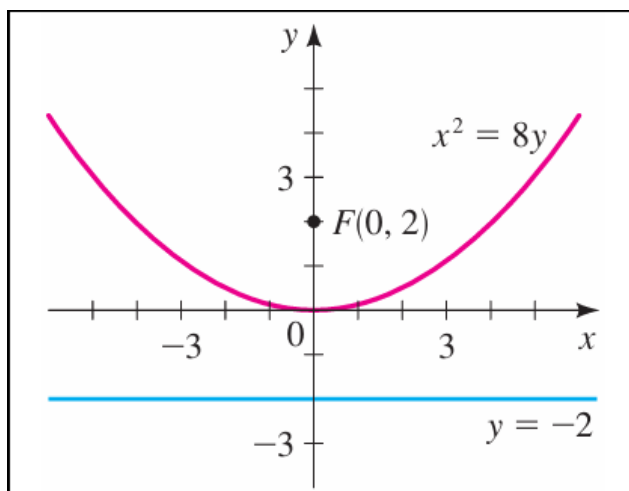
Cómo el foco es $F:(0, 2)$, entonces $p = 2$ ($p > 0$)

La directriz es $y = -p$, es decir, $y = -2$, pasamos el número 2 a sumar:

$$y + 2 = 0$$

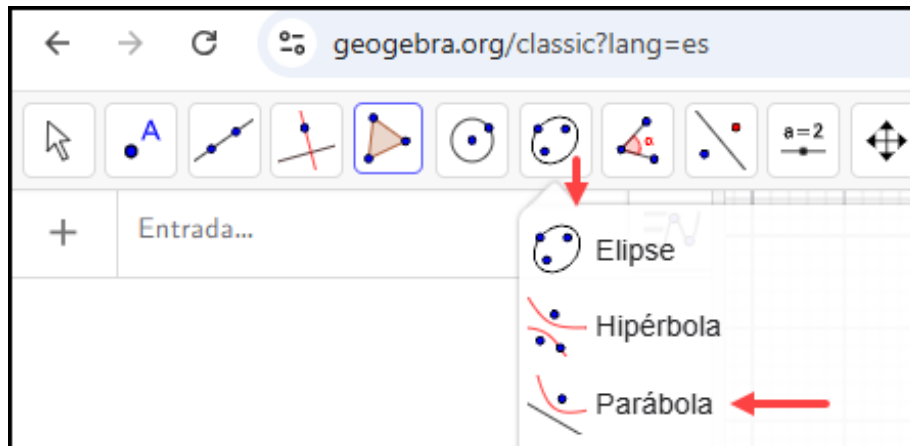
Tenemos una parábola vertical (eje focal y):

$$x^2 = 4yp \rightarrow x^2 = 4y(2) \rightarrow x^2 = 8y$$

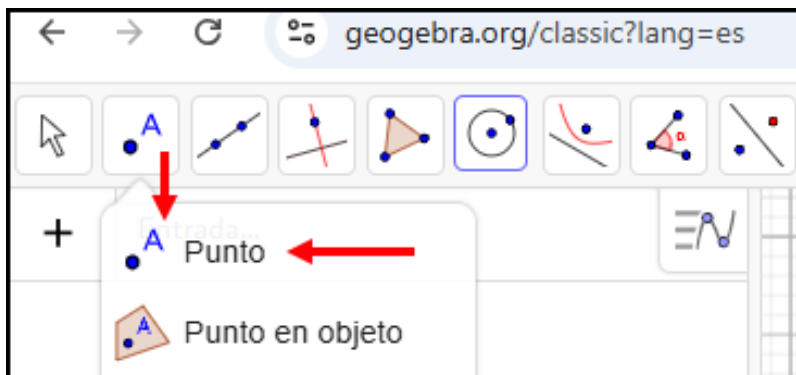


GeoGebra

Este programa es online: Se coloca en el buscador Google: GeoGebra

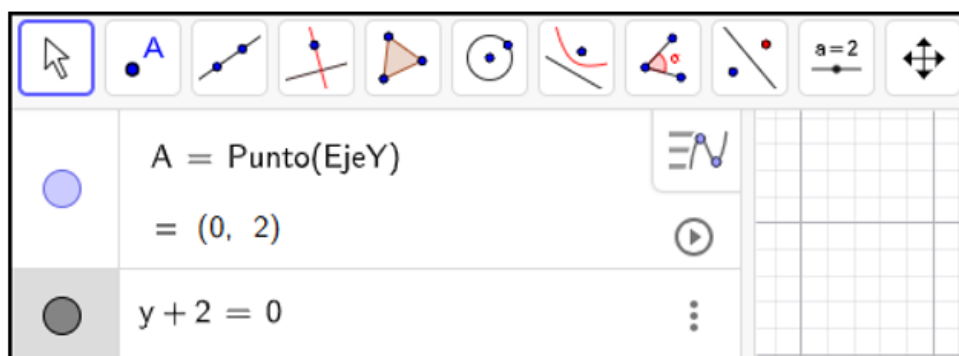


Luego hago un punto, es decir, el Foco:

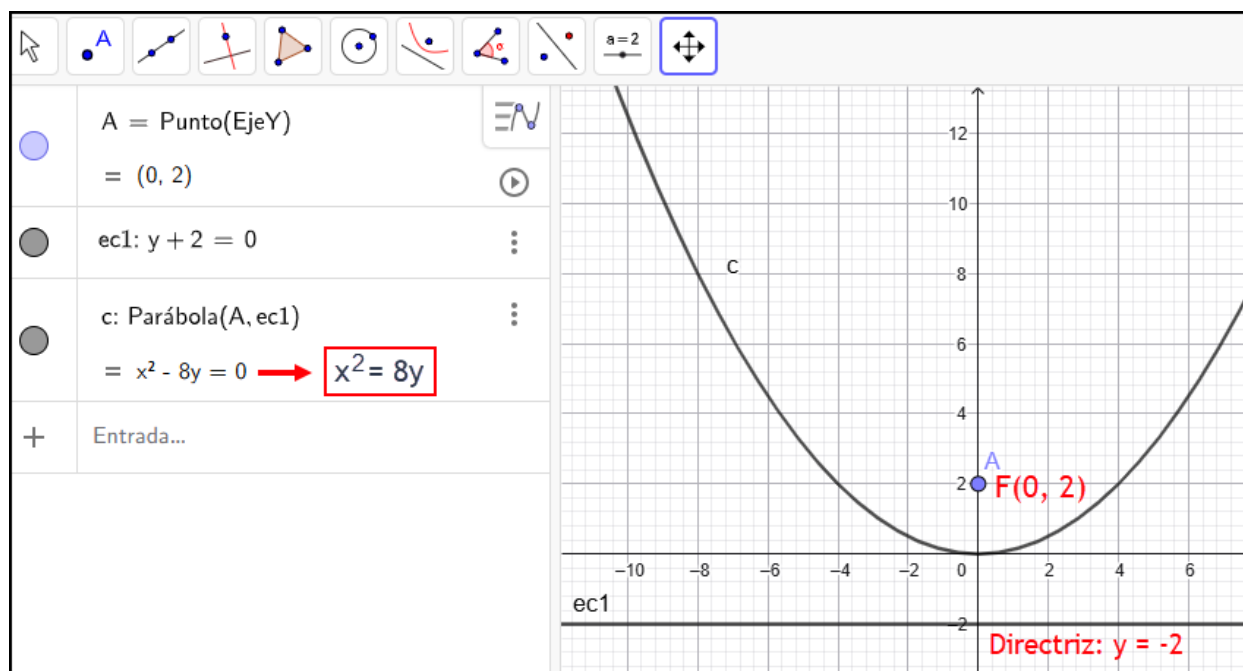


El Foco es $F:(0, 2)$, debemos ubicarlo en el plano con el mouse.

Debemos colocar la directriz: $y + 2 = 0$



Nuevamente buscamos el botón: **Parábola**. Luego vamos al gráfico y se seleccionamos el Foco con el Mouse, luego seleccionamos la directriz y aparece la parábola.



Ejemplo

Hallar el Foco y la directriz de la siguiente parábola:

$$x^2 = -y$$

Solución:

Debemos compararla con su una parábola vertical (aparece $-y$):

$$x^2 = 4py \rightarrow x^2 = (4p)y$$

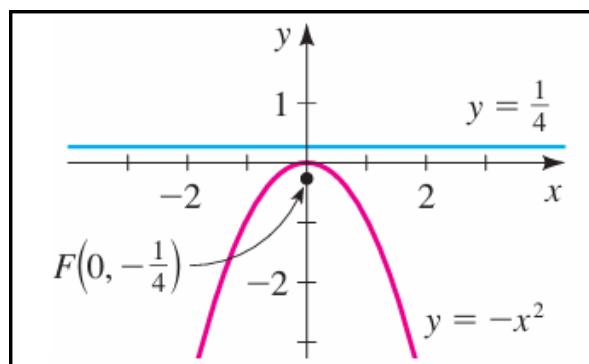
Debemos igualar los coeficientes de la variable y :

$$4p = -1 \rightarrow p = -\frac{1}{4}$$

El Foco es F: $(0, -1/4)$

La directriz es $y = p$, es decir, $y = -1/4$, pasamos a sumar el valor $-1/4$:

$$y + 1/4 = 0$$



Ejemplo

Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en el origen $(0, 0)$ si su eje de simetría es el eje X. Además, el punto $(-1/2, 2)$ pertenece a la parábola. Encuentre el foco y la directriz. Hacer el gráfico.

Solución

El eje de simetría es el eje “x”. El punto $(-1/2, 2)$ tiene el valor de “x” negativo ($x = -1/2$). Con estos dos datos el modelo que se utiliza es:

$$y^2 = -4xp$$

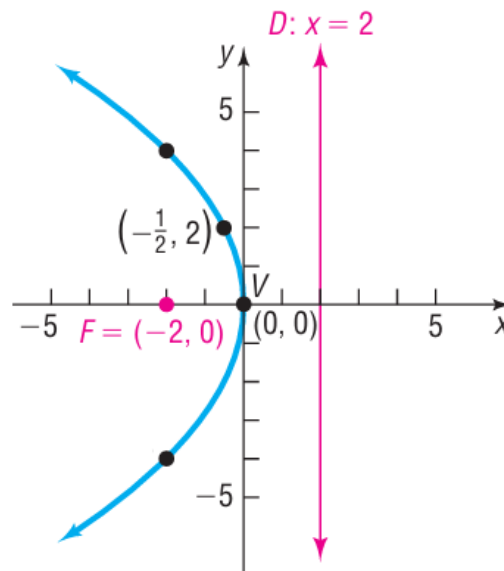
Debemos reemplazar el punto $(-1/2, 2)$ para encontrar el Foco. Tenemos: $x = -1/2$, $y = 2$

$$y^2 = -4xp \rightarrow (2)^2 = -4\left(-\frac{1}{2}\right)p \rightarrow 4 = 2p \rightarrow p = \frac{4}{2} \rightarrow p = 2$$

Cómo la parábola está en el eje “x” con valor negativo ($x = -1/2$), el Foco es: $F: (-2, 0)$

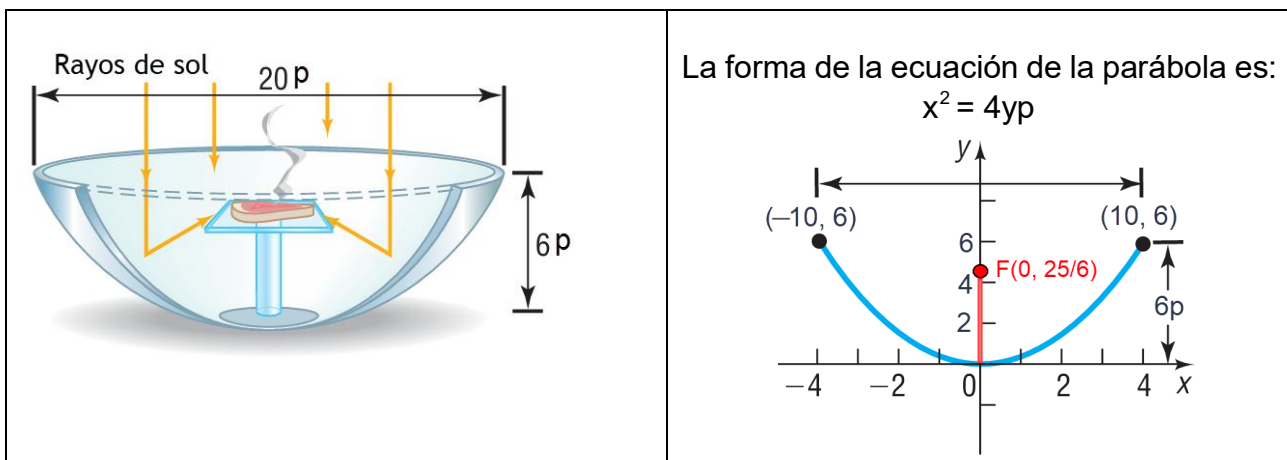
Reemplazando el valor de “p” en el modelo para encontrar la ecuación de la parábola:

$$y^2 = -4xp \rightarrow y^2 = -4x(2) \rightarrow y^2 = -8x$$



Aplicación

Un espejo tiene forma de paraboloide de revolución y se utilizará para concentrar los rayos del sol en su foco, creando una fuente de calor. Vea la figura. Si el espejo tiene un diámetro de 20 pies en su abertura y una profundidad de 6 pies, ¿dónde se concentrará la fuente de calor?

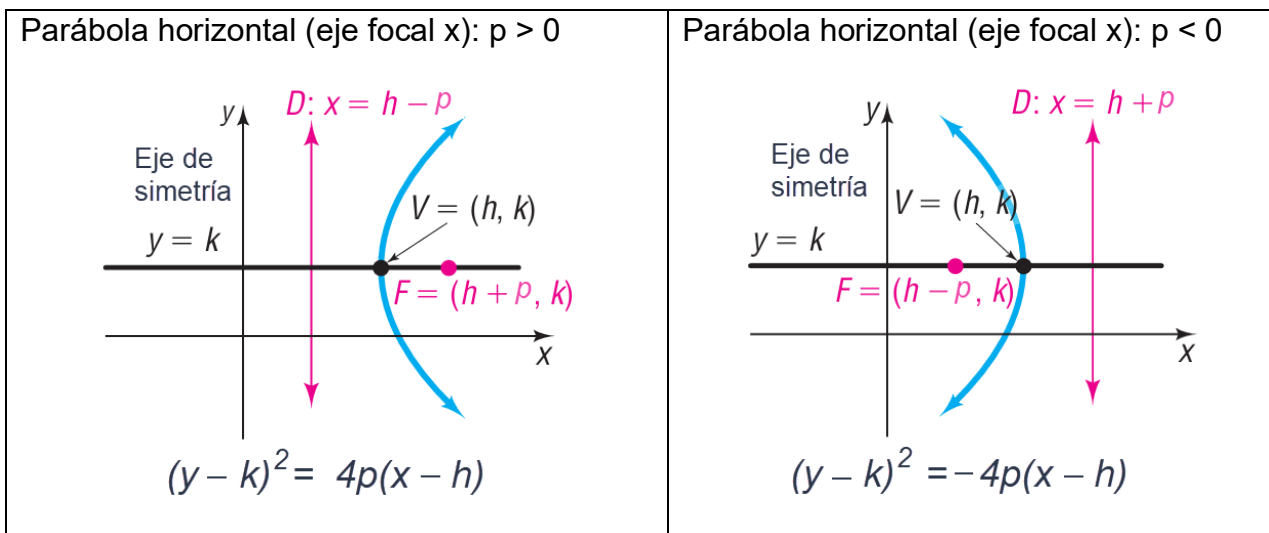


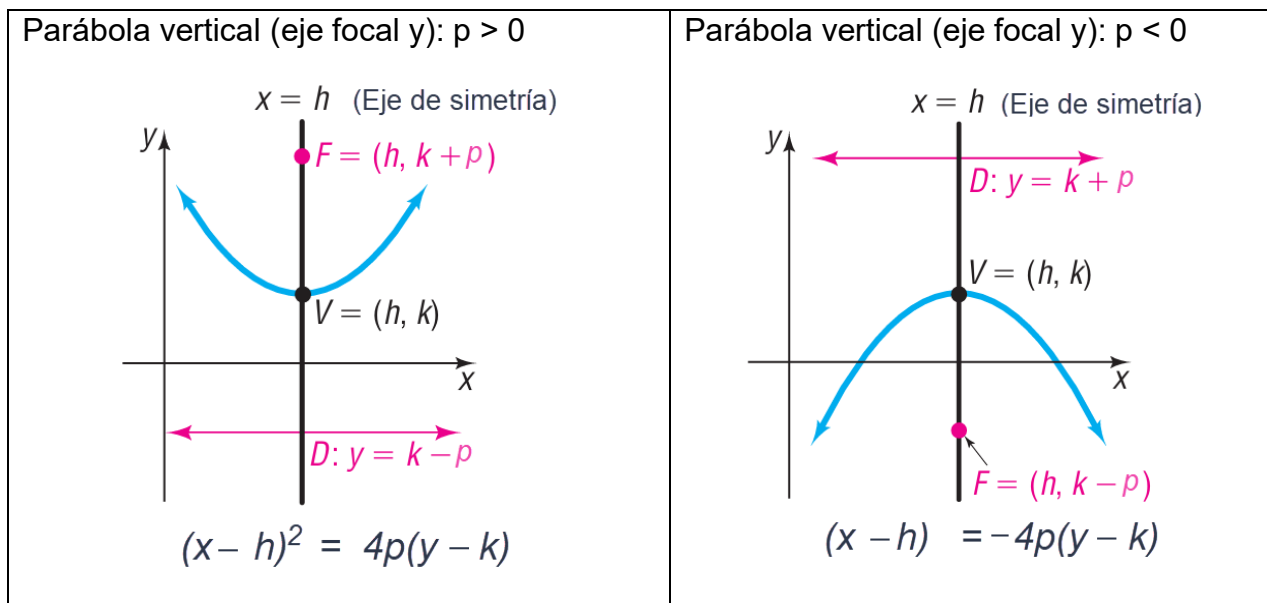
Podemos reemplazar el punto (10, 6) en el modelo de la parábola para encontrar la ecuación del paraboloide. Tenemos: $x = 10$, $y = 6$

$$x^2 = 4yp \rightarrow (10)^2 = 4(6)p \rightarrow 100 = 24p \rightarrow p = \frac{100}{24} \rightarrow p = \frac{25}{6} \quad (4.166)$$

El Foco es F: $(0, 25/6)$

Ecuación de una parábola con vértice fuera del origen (h, k)





Ejemplo

Halla el foco y el vértice de la parábola:

$$(x - 5)^2 = 12(y + 1)$$

Solución

La ecuación que nos dan es del tipo:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Se trata de una parábola vertical con vértice en (h, k) , es decir, eje focal y.

$$(x - 5)^2 = 12(y + 1) \rightarrow (x - 5)^2 = 12(y - (-1)), \text{ vértice } (h, k) = (5, -1)$$

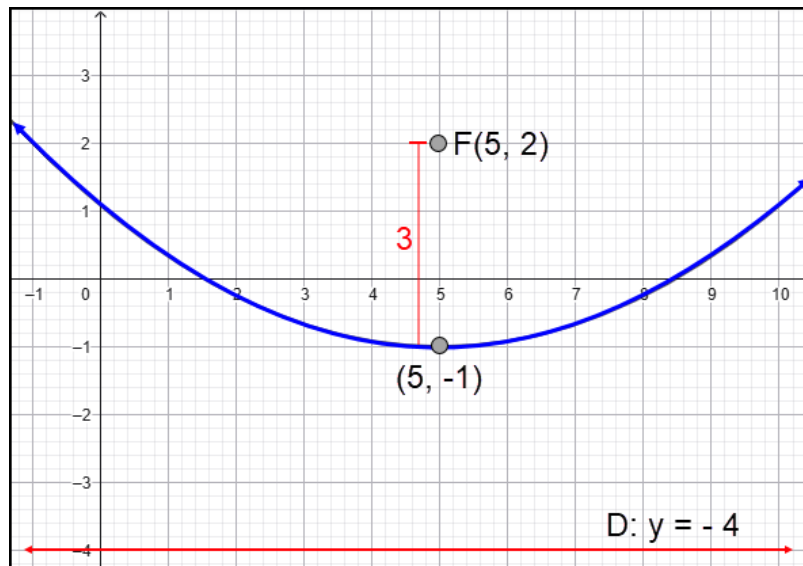
Encontremos el valor de p :

$$4p = 12 \rightarrow p = \frac{12}{4} \rightarrow p = 3 \quad (p > 0) \rightarrow \text{parábola vertical}$$

El **Foco** está p unidades por arriba del vértice, en el punto $(h, k + p)$: $(5, -1 + 3)$, $F(5, 2)$

La directriz equivale a:

$$y = k - p \rightarrow y = -1 - 3 \rightarrow y = -4$$



Ejemplo

Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en $(-2, 3)$ y Foco en el punto $(0, 3)$. Grafique la ecuación de la parábola.

Solución

Se observa que el vértice y el foco tienen el mismo número 3 en la componente de “y”, es decir, $y = 3$ (eje de simetría), se trata de una parábola horizontal.

El valor de “p” es la distancia del vértice al foco:

$$\begin{array}{c} (-2, 3) \quad \quad (0, 3) \\ \text{-----} \\ p = 0 - (-2) = 2 \end{array}$$

El vértice es $(-2, 3)$, $h = -2$, $k = 3$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \rightarrow (y - 3)^2 = 4(2)(x - (-2)) \rightarrow (y - 3)^2 = 8(x + 2)$$

Para encontrar los puntos que definen el **lado recto**, debemos hacer $x = 0$ en la ecuación de la parábola:

$$(y - 3)^2 = 8(x + 2) \rightarrow (y - 3)^2 = 8(0 + 2) \rightarrow (y - 3)^2 = 8(2) \rightarrow (y - 3)^2 = 16$$

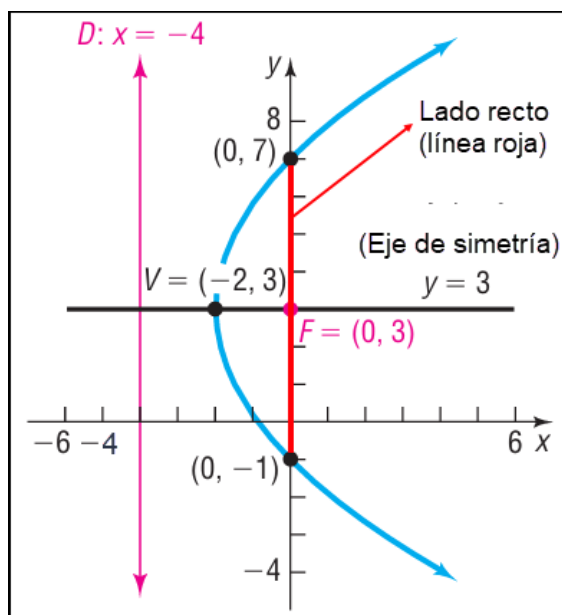
$$(y - 3) = \pm \sqrt{16} \rightarrow y - 3 = \pm 4 \rightarrow y = \pm 4 + 3$$

Salen dos soluciones:

$$\begin{cases} y = +4 + 3 \rightarrow y = 7 & (0, 7) \\ y = -4 + 3 \rightarrow y = -1 & (0, -1) \end{cases}$$

La directriz con este modelo es:

$$D: x = h - p \rightarrow D: x = -2 - 2 \rightarrow D: x = -4$$



El lado recto siempre se consigue con la fórmula:

$$LR = 4|p| \rightarrow LR = 4|2| \rightarrow LR = 8$$

Ecuación general de la parábola

La ecuación general de la parábola tiene la siguiente forma:

Horizontal	Vertical
$y^2 + Dx + Ex + F = 0$	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplo

Obtén la ecuación ordinaria, el vértice, el foco, la directriz, el lado recto de la siguiente parábola:

$$y^2 - 5x + 10y + 17 = 0$$

La variable que está al cuadrado es "y", entonces, agrupamos los términos solo en "y", para luego formar el trinomio cuadrado perfecto: TCP

$$(y^2 + 10y + \boxed{}) = 5x - 17 + \boxed{}$$

Para encontrar el valor que permite formar el TCP en la variable "y", se hace lo siguiente:

La mitad del coeficiente de "y" y se eleva al cuadrado

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = (5)^2 = 25$$

$$(y^2 + 10y + 25) = 5x - 17 + 25$$

Tenemos un trinomio cuadrado perfecto, debemos factorizarlo:

$$(y + 5)^2 = 5x + 8 \rightarrow (y + 5)^2 = 5\left(x + \frac{8}{5}\right) \rightarrow (y - (-5))^2 = 5\left(x - \left(-\frac{8}{5}\right)\right)$$

Tiene la misma forma del modelo:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Comparando ambas, encontramos el vértice y el valor de “p”

vértice: $(h, k) = (-8/5, -5) = (-1.6, -5)$

Tenemos que: $4p = 5$, $p = 5/4$ ($p > 0$)

Como “p” es un número mayor a cero ($p > 0$), la parábola es horizontal. Entonces, el foco se calcula así (ver modelo):

$$F = (h + p, k) \rightarrow F = \left(-\frac{8}{5} + \frac{5}{4}, -5\right) \rightarrow F = (-0.35, -5)$$

La directriz se calcula así (ver modelo):

$$D: x = h - p \rightarrow x = -\frac{8}{5} - \frac{5}{4} \rightarrow x = -2.85 \rightarrow x + 2.85 = 0$$

En GeoGebra:

